

КОЛИЧЕСТВЕННАЯ КОНЦЕНТРАЦИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПУАНКАРЕ В ЛЕМНИСКАТНЫХ ОБЛАСТЯХ С СУЖАЮЩЕЙСЯ ПЕРЕМЫЧКОЙ

Жабборов Насридин Мирзоодилович

*Ташкентский государственный экономический университет, Ташкент,
Узбекистан*

E-mail: zhabborovnasridin@gmail.com

Бозаров Дилмурод Уралович

Университет экономики и педагогики, Кариш, Узбекистан

E-mail: d.bozorov@inbox.ru

ORCID: 0009-0000-0328-7455

Аннотация. В работе исследуется концентрация геодезических Пуанкаре в семействе лемнискатных областей с сужающейся внутренней перемычкой. В качестве явной модели рассматриваются области

$$\Omega_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : |z^2 - 1| < 1 + \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Установлено, что пересечение области с мнимой осью имеет вид

$$S_\varepsilon = \{iy : |y| < \sqrt{\varepsilon}\}.$$

Следовательно, ширина перемычки равна $2\sqrt{\varepsilon}$ и стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0+$. Для семейства геодезических Пуанкаре Γ_ε , соединяющих левую и правую части области, вводится радиус концентрации и доказывается оценка

$$C_\varepsilon(\Gamma_\varepsilon, 0) \leq \sqrt{\varepsilon}.$$

Полученный результат показывает, что геодезические количественно концентрируются в окрестности начала координат вследствие глобального вырождения геометрии области.

Ключевые слова: лемнискатная область, метрика Пуанкаре, гиперболическая геодезическая, концентрация геодезических, сужающаяся перемычка, овал Кассини.

MSC 2020: 30F45, 30C20, 53C22.

Введение

Метрика Пуанкаре является одним из основных объектов комплексного анализа и гиперболической геометрии. В единичном диске

$$\mathbb{D} = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$$

она задаётся формулой

$$ds_{\mathbb{D}}^2 = \frac{4|dw|^2}{(1-|w|^2)^2}$$

и имеет постоянную гауссову кривизну $K = -1$.

В произвольной односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ метрика Пуанкаре определяется посредством конформного отображения области на единичный диск. Несмотря на постоянство локальной кривизны, глобальное расположение геодезических существенно зависит от формы области.

Особый интерес представляют области, состоящие из двух широких частей, соединённых узкой перемычкой. При сужении такой перемычки каждая кривая, переходящая из одной части области в другую, вынуждена проходить через всё меньшую окрестность точки вырождения. Это приводит к эффекту геодезической концентрации.

Рассмотрим семейство полиномиальных лемнискатных областей

$$\Omega_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : |z^2 - 1| < 1 + \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Граница области задаётся уравнением

$$|z^2 - 1| = 1 + \varepsilon$$

и является овалом Кассини. При $\varepsilon \rightarrow 0+$ граница приближается к лемнискате Бернулли, имеющей точку самосоприкосновения в начале координат.

Обозначим левую и правую части области через

$$\Omega_\varepsilon^- = \Omega_\varepsilon \cap \{\operatorname{Re} z < 0\},$$

$$\Omega_\varepsilon^+ = \Omega_\varepsilon \cap \{\operatorname{Re} z > 0\}.$$

Для определения ширины перемычки положим $z = iy$, где $y \in \mathbb{R}$. Тогда

$$|z^2 - 1| = |-y^2 - 1| = 1 + y^2.$$

Поэтому

$$iy \in \Omega_\varepsilon \Leftrightarrow 1 + y^2 < 1 + \varepsilon,$$

откуда

$$|y| < \sqrt{\varepsilon}.$$

Таким образом,

$$S_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \cap i\mathbb{R} = \{iy : |y| < \sqrt{\varepsilon}\}.$$

Евклидов диаметр этого сечения равен

$$\operatorname{diam}_E S_\varepsilon = 2\sqrt{\varepsilon} \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0+.$$

Следовательно, S_ε представляет собой сужающееся поперечное сечение внутренней перемычки.

Основной результат

Пусть Γ_ε — семейство кривых в области Ω_ε , а $p \in \mathbb{C}$. Определим радиус концентрации формулой

$$C_\varepsilon(\Gamma_\varepsilon, p) = \sup_{\gamma \in \Gamma_\varepsilon} \inf_{z \in \gamma} |z - p|.$$

Будем говорить, что семейство Γ_ε концентрируется в точке p , если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} C_\varepsilon(\Gamma_\varepsilon, p) = 0.$$

Пусть $E^- \subset \Omega_\varepsilon^-$, $E^+ \subset \Omega_\varepsilon^+$ — непустые множества. Через $\gamma_{x,y}^\varepsilon$ обозначим геодезическую Пуанкаре области Ω_ε , соединяющую точки

$$x \in E^-, \quad y \in E^+.$$

Рассмотрим семейство

$$\Gamma_\varepsilon = \{\gamma_{x,y}^\varepsilon : x \in E^-, y \in E^+\}.$$

Теорема

Для семейства Γ_ε выполняется оценка

$$C_\varepsilon(\Gamma_\varepsilon, 0) \leq \sqrt{\varepsilon}.$$

Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} C_\varepsilon(\Gamma_\varepsilon, 0) = 0.$$

Краткое доказательство

Пусть $\gamma \in \Gamma_\varepsilon$. Начальная и конечная точки геодезической лежат в разных частях области. Поэтому непрерывная функция $t \rightarrow \operatorname{Re} \gamma(t)$ принимает как отрицательные, так и положительные значения. По теореме о промежуточном значении существует t_0 , для которого

$$\operatorname{Re} \gamma(t_0) = 0.$$

Следовательно,

$$\gamma(t_0) = iy_0$$

для некоторого $y_0 \in \mathbb{R}$. Поскольку $\gamma(t_0) \in \Omega_\varepsilon$, имеем

$$1 + y_0^2 < 1 + \varepsilon,$$

откуда

$$|y_0| < \sqrt{\varepsilon}.$$

Таким образом,

$$\inf_{z \in \gamma} |z| < \sqrt{\varepsilon}.$$

Переходя к супремуму по всем $\gamma \in \Gamma_\varepsilon$, получаем требуемую оценку.

Если хотя бы одно из множеств E^- или E^+ имеет мощность континуума, то Γ_ε содержит континуальное семейство попарно различных концентрирующихся геодезических. Для этого достаточно зафиксировать одну конечную точку и изменять вторую по множеству мощности континуума.

Заключение

Для семейства лемнискатных областей

$$\Omega_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : |z^2 - 1| < 1 + \varepsilon\}$$

найденно сужающееся поперечное сечение

$$S_\varepsilon = \{iy : |y| < \sqrt{\varepsilon}\},$$

диаметр которого равен $2\sqrt{\varepsilon}$. Доказано, что каждая геодезическая Пуанкаре, соединяющая левую и правую части области, пересекает это сечение. В результате получена количественная оценка

$$C_\varepsilon(\Gamma_\varepsilon, 0) \leq \sqrt{\varepsilon}.$$

Таким образом, при $\varepsilon \rightarrow 0+$ семейство геодезических концентрируется в окрестности начала координат. Эффект концентрации обусловлен глобальным вырождением геометрии области, тогда как локальная гауссова кривизна метрики Пуанкаре остаётся равной -1 .

Литература

1. Ahlfors L. V. *Complex Analysis*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1979.
2. Ahlfors L. V. *Conformal Invariants: Topics in Geometric Function Theory*. New York: McGraw-Hill, 1973.
3. Beardon A. F. *The Geometry of Discrete Groups*. New York: Springer-Verlag, 1983.
4. Pommerenke Ch. *Boundary Behaviour of Conformal Maps*. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
5. Ebenfelt P., Khavinson D., Shapiro H. S. Two-dimensional shapes and lemniscates // *Contemporary Mathematics*. 2011. Vol. 553. P. 45–59.