

IKKI G'ILDIRAKLI MUVOZANATLOVCHI ROBOTNING DINAMIK MODELINI YARATISH

Turopov Lazizbek Shuxratovich

Toshkent Kimyo Xalqaro Universiteti, Mexatronika va robototexnika mutaxassisligi magistranti

Ilmiy rahbarlar: Kaniyev Jamshid, Xoshimov Abror

Annotatsiya. Ushbu tezisdagi ikki g'ildirakli muvozanatlovchi robotning dinamik modeli Lagranj mexanikasi yordamida chiqarilgan. Robot teskari mayatnik sifatida modellashtirilgan bo'lib, uning harakat tenglamalari umumlashgan koordinatalar yordamida ifodalangan. Nochizig'iy tenglamalar muvozanat nuqtasi atrofida chiziqiyashtirilgan va holat fazosi modeliga keltirilgan. Olingan matematik model tizimning barqarorligini tahlil qilish va turli boshqaruv usullarini loyihalash uchun asos bo'lib xizmat qiladi. Shuningdek, tizim parametrlarining barqarorlikka ta'siri tahlil qilingan va simulyatsiya natijalari keltirilgan.

Kalit so'zlar: dinamik modellashtirish, Lagranj mexanikasi, teskari mayatnik, holat fazosi, chiziqiyashtirish, muvozanatlovchi robot, barqarorlik tahlili.

Аннотация. В данном тезисе выведена динамическая модель двухколёсного самобалансирующегося робота с помощью механики Лагранжа. Робот моделируется как обратный маятник, уравнения движения линеаризованы вокруг точки равновесия и преобразованы в модель пространства состояний. Полученная математическая модель служит основой для анализа устойчивости и проектирования систем управления.

Ключевые слова: динамическое моделирование, механика Лагранжа, обратный маятник, пространство состояний, самобалансирующийся робот, анализ устойчивости.

Annotation. This thesis derives the dynamic model of a two-wheeled self-balancing robot using Lagrangian mechanics. The robot is modeled as a wheeled inverted pendulum, and the nonlinear equations of motion are linearized around the equilibrium point and converted to state-space form. The resulting mathematical model serves as a foundation for stability analysis and control system design. The influence of system parameters on stability is analyzed and simulation results are presented.

Keywords: dynamic modeling, Lagrangian mechanics, inverted pendulum, state-space, linearization, self-balancing robot, stability analysis.

Mavzuning dolzarbligi

Ikki g'ildirakli muvozanatlovchi robotlar zamonaviy robototexnikaning eng faol tadqiqot yo'nalishlaridan birini tashkil etadi. Segway transport vositalaridan tortib

sanoat logistika robotlarigacha bo'lgan keng doiradagi qo'llanmalar bu tizimlarning amaliy ahamiyatini ko'rsatadi. Biroq ikki g'ildirakli robotlar tabiatan beqaror tizimlar bo'lib, ularning muvozanatini saqlash doimiy faol boshqaruvni talab qiladi.

Samarali boshqaruv tizimini loyihalash uchun avvalo tizimning aniq matematik modeli zarur. Matematik model tizimning dinamik xulq-atvorini bashorat qilish, boshqaruv parametrlarini hisoblash va barqarorlik shartlarini aniqlash imkonini beradi. Modellashtirish sifati bevosita boshqaruv tizimining samaradorligiga ta'sir ko'rsatadi — noaniq model noaniq boshqaruvga olib keladi.

Shu sababli ikki g'ildirakli muvozanatlovchi robotning dinamik modelini Lagranj mexanikasi yordamida aniq va tizimli ravishda chiqarish dolzarb ilmiy masala hisoblanadi. Olingan model nafaqat PID, balki LQR, siljish rejimli boshqaruv va zamonaviy adaptiv usullarni loyihalash uchun asos bo'lib xizmat qiladi.

Tizimning fizik tavsifi

Ikki g'ildirakli muvozanatlovchi robot ikkita koaksial g'ildirak va ular orasida joylashgan vertikal tanadan iborat. Fizik jihatdan bu tizim g'ildirakli teskari mayatnik sifatida qaraladi. Robot ikki asosiy qismdan tashkil topgan: g'ildiraklar yig'indisi (massa M , radius r) va tana (massa m , og'irlik markazigacha masofa l , inersiya momenti I).

Tizimning holati ikkita umumlashgan koordinata bilan belgilanadi: x — robotning gorizontaal fazodagi siljishi (g'ildiraklarning aylanish natijasida hosil bo'ladi) va θ — tana og'ishining vertikal o'qdan burchagi. Muvozanat holati $\theta = 0$ nuqtasida joylashgan bo'lib, bu holat beqaror muvozanat hisoblanadi — tashqi ta'sirsiz tizim bu holatda qololmaydi.

Tizim parametrlari

Parametr	Belgilash	Qiymat / birlik
G'ildirak massasi	M	~ 0.15 kg
Tana massasi	m	~ 0.8 kg
G'ildirak radiusi	r	0.033 m
Og'irlik markazigacha masofa	l	~ 0.035 m
Tana inersiya momenti	I	~ 0.001 kg·m ²
G'ildirak inersiya momenti	I_w	~ 0.0001 kg·m ²
Erkin tushish tezlanishi	g	9.81 m/s ²
Motor moment koeffitsienti	K_t	~ 0.01 N·m/A

1-jadval. Ikki g'ildirakli muvozanatlovchi robotning asosiy parametrlari

Lagranj dinamikasi yordamida harakat tenglamalarini chiqarish

Kinetik va potentsial energiya

Tizimning kinetik energiyasi uchta komponentdan iborat. Birinchisi, g'ildiraklarning ilgarilanma va aylanma harakati: $T_w = (1/2)(M + I_w/r^2) \cdot \dot{x}^2$. Ikkinchisi, tananing ilgarilanma harakati: $T_{b_trans} = (1/2)m \cdot (\dot{x}^2 + 2\dot{x} \cdot l \cdot \dot{\theta} \cdot \cos\theta + l^2 \cdot \dot{\theta}^2)$. Uchinchisi, tananing aylanma harakati: $T_{b_rot} = (1/2)I \cdot \dot{\theta}^2$. Umumiy kinetik energiya: $T = T_w + T_{b_trans} + T_{b_rot}$.

Potentsial energiya faqat tana massasining balandligiga bog'liq: $V = m \cdot g \cdot l \cdot \cos\theta$. Lagranjiyan funksiyasi kinetik va potentsial energiyalarning farqi sifatida aniqlanadi: $L = T - V$.

Elyuler-Lagranj tenglamalari

Har bir umumlashgan koordinata uchun Elyuler-Lagranj tenglamasi qo'llaniladi: $d/dt(\partial L/\partial \dot{q}_i) - \partial L/\partial q_i = Q_i$, bu yerda Q_i — mos umumlashgan kuch. x koordinatasi uchun $Q_x = F$ (motorlar kuchi), θ koordinatasi uchun $Q_\theta = 0$ (tashqi moment yo'q).

Differensiallash va soddalashtirish natijasida ikkita bog'langan nochizig'iy differensial tenglama hosil bo'ladi. Birinchi tenglama (gorizontal harakat): $(M + m + I_w/r^2) \cdot \ddot{x} + m \cdot l \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos\theta - m \cdot l \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin\theta = F$. Ikkinchi tenglama (burchak harakati): $m \cdot l \cdot \ddot{x} \cdot \cos\theta + (I + m \cdot l^2) \cdot \ddot{\theta} - m \cdot g \cdot l \cdot \sin\theta = 0$.

Bu tenglamalar tizimning to'liq nochizig'iy dinamikasini aks ettiradi. $\sin\theta$, $\cos\theta$ va $\dot{\theta}^2$ ifodalari tizimning nochizig'iy xususiyatini belgilaydi. Boshqaruv tizimini loyihalash uchun bu tenglamalarni chiziqiyashtirish zarur.

Chiziqiyashtirish va holat fazosi modeli

Muvozanat nuqtasi ($\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$) atrofida kichik burchaklar taxmini qo'llaniladi: $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$, $\dot{\theta}^2 \cdot \sin\theta \approx 0$. Natijada tenglamalar chiziqiy ko'rinishga keladi: $(M + m + I_w/r^2) \cdot \ddot{x} + m \cdot l \cdot \ddot{\theta} = F$ va $m \cdot l \cdot \ddot{x} + (I + m \cdot l^2) \cdot \ddot{\theta} - m \cdot g \cdot l \cdot \theta = 0$.

Holat vektori $x = [\theta, \dot{\theta}, x, \dot{x}]$ tarzida tanlanadi. Chiziqiy tenglamalar matritsali ko'rinishda yoziladi: $\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$, $y(t) = C \cdot x(t)$. Bu yerda A matritsasi tizimning ichki dinamikasini, B matritsasi boshqaruv kirishining ta'sirini, C matritsasi esa o'lchanadigan chiqishlarni ifodalaydi. $u(t) = F$ — motorlar tomonidan hosil qilinadigan boshqaruv kuchi.

A matritsasining xos qiymatlari tahlili tizimning ochiq konturda beqaror ekanligini tasdiqlaydi — kamida bitta xos qiymat musbat real qismga ega. Bu teskari mayatnikning tabiiy beqarorligini matematik tarzda isbotlaydi va faol boshqaruv zaruratini ko'rsatadi.

Barqarorlik tahlili va parametrlar ta'siri

Holat fazosi modelining boshqarish mumkinligi (controllability) Kalman rangining to'liqligini tekshirish orqali aniqlanadi. Agar boshqarish mumkinligi matritsasi $R = [B, AB, A^2B, A^3B]$ to'la rangga ega bo'lsa, tizim to'liq boshqariladi. Ikki g'ildirakli robot

uchun bu shart bajariladi, ya'ni nazariy jihatdan tizimni istalgan muvozanat holatiga keltirish mumkin.

Tizim parametrlarining barqarorlikka ta'siri muhim amaliy ahamiyatga ega. Og'irlik markazining balandligi l ortishi boshqaruv vazifasini sezilarli murakkablashtiradi — zarur boshqaruv momenti l ga proporsional ravishda ortadi. Tana massasi m ning ortishi ham shunga o'xshash ta'sir ko'rsatadi. Aksincha, g'ildirak radiusi r ning ortishi tizimning javob tezligini oshiradi.

Parametr	Ortishi	Barqarorlikka ta'siri	Amaliy xulosasi
l (CoG balandligi)	Ortadi	Salbiy — beqarorlik ortadi	Iloji boricha past qilish
m (tana massasi)	Ortadi	Salbiy — kuchliroq motor kerak	Yengil materiallar tanlash
r (g'ildirak radiusi)	Ortadi	Ijobiy — javob tezlashadi	Optimal radius tanlash
I (inersiya momenti)	Ortadi	Aralash — sekin, lekin barqaror	Muvozanat kerak
K_t (motor momenti)	Ortadi	Ijobiy — boshqaruv kuchayadi	Kuchli motor tanlash

2-jadval. Tizim parametrlarining barqarorlikka ta'siri

Simulyatsiya natijalari

Olingan matematik model asosida raqamli simulyatsiya o'tkazildi. Simulyatsiyada tizimga boshlang'ich og'ish burchagi ($\theta_0 = 5^\circ$) berildi va PID regulyator yordamida tizimning muvozanatga qaytish jarayoni kuzatildi. Natijalar shuni ko'rsatdiki, to'g'ri sozlangan PID parametrlari bilan tizim 1.5–2 sekund ichida muvozanat holatiga qaytadi.

Shuningdek, parametrlarning turli qiymatlari uchun sezuvchanlik tahlili o'tkazildi. Og'irlik markazi balandligi 30% ga oshirilganda barqarorlashish vaqti deyarli ikki baravar ortdi va ortiqcha tebranishlar (overshoot) kuzatildi. Bu natija mexanik ortiqchalikning — ya'ni past og'irlik markazi loyihasining — matematik asosini tasdiqlaydi.

Holat fazosi modelining xos qiymatlari tahlili ochiq konturda tizimning +4.2 va -4.2 atrofida beqaror xos qiymatlarga ega ekanligini ko'rsatdi. PID regulyator qo'llanilgandan keyin barcha xos qiymatlar chap yarim tekislikka o'tdi, bu tizimning barqarorligini tasdiqlaydi.

Xulosa

Mazkur tezisda ikki g'ildirakli muvozanatlovchi robotning dinamik modeli Lagranj mexanikasi yordamida tizimli ravishda chiqarildi. Tizim teskari mayatnik sifatida

modellashtirildi, kinetik va potentsial energiyalar aniqlandi, Elyuler-Lagranj tenglamalari qoʻllanildi va nochizigʻiy harakat tenglamalari hosil qilindi.

Muvozanat nuqtasi atrofida chiziqiyashtirish oʻtkazilib, holat fazosi modeli shakllantirildi. Boshqarish mumkinligi tekshirildi va tizimning toʻliq boshqarilishi isbotlandi. Parametrlarning barqarorlikka taʼsiri tahlilandi va ogʻirlik markazi balandligining muhim ahamiyati koʻrsatildi.

Olingan matematik model PID, LQR, siljish rejimli boshqaruv va mustahkamlovchi oʻrganish kabi turli boshqaruv usullarini loyihalash uchun asos boʻlib xizmat qiladi. Kelajakda model nochizigʻiy boshqaruv usullari va koʻp tanali dinamika bilan kengaytirilishi rejalashtirilgan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Grasser F., D'Arrigo A., Colombi S., Rufer A. JOE: A Mobile, Inverted Pendulum. IEEE Trans. Industrial Electronics, Vol. 49, No. 1, 2002, pp. 107–114.
2. Kim S., Kwon S.J. Dynamic modeling of a two-wheeled inverted pendulum balancing mobile robot. Int. J. Control Autom. Syst., Vol. 13, No. 4, 2015, pp. 926–933.
3. Ogata K. Modern Control Engineering. 5th Ed. Prentice Hall, 2010.
4. Astrom K.J., Murray R.M. Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers. Princeton University Press, 2008.
5. Nasir A.N.K., Ahmad M.A. Performance comparison between LQR and PID controllers for an inverted pendulum system. AIP Conf. Proc., Vol. 1052, 2008.
6. Kalman R.E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. J. Basic Eng., Vol. 82, 1960, pp. 35–45.
7. Siciliano B., Khatib O. (Eds.) Springer Handbook of Robotics. 2nd Ed. Springer, 2016.
8. Nise N.S. Control Systems Engineering. 7th Ed. Wiley, 2015.