

ANIQ INTEGRALLARNI TRAPETSIYALAR USULI BILAN TAQRIBIY HISOBLASH

A.I. Ismoilov

FarDU, amaliy matematika va informatika kafedrasi katta o'qituvchisi. Fizika - matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori(PhD)

E-mail: ismoilovaxrorjon@yandex.com

Nabiyev Asadbek Akmaljon o'g'li

Farg'ona davlat universiteti amaliy matematika yo'nalishi 3-kurs talabasi talabasi

E-mail: nabiyevasadbek0808@gmail.com

Orcid: 0009-0007-2562-5073

Annotatsiya: Ushbu maqolada trapetsiyalar usuli yordamida aniq integrallarni taqribiy hisoblash masalalari ko'rib chiqilgan. Bu usul ayniqsa foydali bo'ladi, agar funktsiyaning boshlang'ich funktsiyasi elementar ko'rinishda ifodalab bo'lmasa yoki analitik integrallash qiyin bo'lsa.

Trapetsiyalar usuli — sodda, lekin samarali hisoblash usuli bo'lib, jadval ko'rinishida berilgan funktsiyalar yoki analitik integrallanmaydigan funktsiyalar uchun qo'llaniladi. Dasturiy kodlar (C# va Python) usulni amaliy loyihalarda qo'llash imkonini beradi.

Kalit so'zlar: sonli usullar, aniq integral, trapetsiyalar usuli, yaqinlashgan hisoblash, Python, C#, xatolik tahlili.

Abstract: This article examines the issues of approximate calculation of definite integrals using the trapezoidal rule. This method is particularly useful when the antiderivative of a function cannot be expressed in elementary form or when analytical integration is difficult.

The trapezoidal rule is a simple yet effective computational method applicable to tabulated functions or functions that cannot be integrated analytically. Practical implementations in programming languages (C# and Python) enable the application of this method in real-world projects.

Keywords: numerical methods, definite integral, trapezoidal rule, approximate computation, Python, C#, error analysis.

Аннотация: В данной статье рассматриваются вопросы приближенного вычисления определенных интегралов с использованием метода трапеций. Этот метод особенно полезен, когда первообразная функции не выражается в

элементарной форме или когда аналитическое интегрирование затруднительно.

Метод трапеций является простым, но эффективным вычислительным методом, применимым к таблично заданным функциям или функциям, не поддающимся аналитическому интегрированию. Практические реализации на языках программирования (C# и Python) позволяют применять этот метод в реальных проектах.

Ключевые слова: численные методы, определенный интеграл, метод трапеций, приближенное вычисление, Python, C#, анализ погрешностей.

Kirish

Ma'lumki, ko'pgina funktsiyalarning boshlang'ich funktsiyalarini natijaviy ko'rinishda yozish imkoni hamma vaqt ham mavjud bo'lavermaydi. Shuning uchun bu funktsiyalarning aniq integrallarini ba'zan taqribiy usullar bilan hisoblash zarurati tug'iladi. Aniq integrallarni taqribiy hisoblash uchun to'g'ri to'rtburchaklar, trapetsiyalar hamda parabolalar(Simpson) usullari mavjud bo'lib, ular egri chiziqli trapetsiya yuzi haqidagi masalaning geometrik yechimi bilan uzviy bog'liq.

$$\int_a^b f(x)dx$$

aniq integralning taqribiy qiymatini topish kerak bo'ladi. AB egri chiziqli trapetsiyaning yuzini berilgan integralning geometrik ifodasi sifatida qarab, bu yuzni topamiz.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funktsiya chiziqli funktsiyaga yaqin bo'lsin, u holda tabiiy ravishda integralni balandligi $b - a$ ga va asoslari $f(a)$ va $f(b)$ ga teng bo'lgan trapetsiya yuzi bilan almashtirish mumkin, u holda

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b))$$

deb olishimiz mumkin. Bu formula trapetsiya formulasi deyiladi. Trapetsiyalar usuli algoritmi $[a, b]$ kesmani

$$a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$$

nuqtalar bilan n ta teng bo'lakka bo'lamiz. Har bir qo'shni bo'luvchi nuqtalar orasidagi $h = (b - a) / n$;

$[a, b]$ kesmani bo'luvchi nuqtalardan chegaraviy egri chiziq bilan qirishgunga qadar perpendikulyar o'tkazamiz. Egri chiziq mos nuqtalarining ordinatalari quyidagicha bo'ladi:

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n)$$

perpendikulyarlarning $y = f(x)$ chiziq bilan qirishgan qo'shni nuqtalarini vatarlar bilan birlashtiramiz va hosil qilingan har bir to'g'ri chiziqli trapetsiyalarning yuzini topamiz:

$$\frac{y_0 + y_1}{2} h, \frac{y_1 + y_2}{2} h, \dots, \frac{y_{n-1} + y_n}{2} h$$

Barcha n ta trapetsiya yuzini qo'shamiz:

$$S = h \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + \frac{y_n}{2} \right)$$

bo'linish qadami $h = (b-a)/n$ ekanligi va hasil bo'lgan yig'indi inobatga olinsa, egri chiziqli trapetsiyaning yuzini taqriban quyidagicha yozish mumkin:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + \frac{f(x_n)}{2} \right)$$

Bu trapetsiya formulasidir.

Trapetsiya formulasining o'ng tomonidagi ifoda integral yig'indisidir va $h \rightarrow 0$ da berilgan integralga intiladi. Biroq, fiksirlangan h da uning har biri berilgan integraldan $R_n(f)$ kattalikka farq qiladi.

Berilgan $\varepsilon > 0$ absolyut xatodan n parametr tanlanadi va shuningdek, h qadam $|R_n(f)| < \varepsilon$ tengsizlikdan topiladi.

$R_n(f)$ kattalik

$$R_n(f) = \frac{b-a}{12} f''(\xi) h^2, \quad \xi \in [a, b]$$

tenglik orqali xarakterlanadi.

Misol. $\int_0^1 (x+1) dx$ integralni trapetsiyalar usulida ($n=10$) taqribiy hisoblang.

Yechish:

1. $[0, 1]$ kesmani $h=0.1$ qadam bilan 10 ta bo'lakka bo'lib olamiz;

Quyidagilarni hisoblaymiz:

$$x_0 = 0, x_1 = 0.1, \dots, x_{10} = 1.$$

2. Quyidagilarni hisoblaymiz:

$$y_0 = f(x_0) = 1, \quad y_1 = f(x_1) = 1.1,$$

$$y_2 = f(x_2) = 1.2, \dots, y_{10} = f(x_{10}) = 2$$

$$\int_0^1 (x+1) dx \approx h \left(\frac{y_0 + y_{10}}{2} + y_1 + \dots + y_9 \right) = 0.1 \times 15 = 1.5$$

$\int_0^1 (x+1)dx$ aniq integralni trapetsiya usuli yordamida hisoblashning C# dagi dasturi.

```
using System;
public class Program // "public" qo'shildi
{
    // f(x) funksiyani aniqlash
    static double f(double x)
    {
        return x + 1; //  $\int(x+1)dx$  uchun
    }
    // Asosiy Main metodi (Replit uchun "public" qilish kerak)
    public static void Main(string[] args)
    {
        Console.WriteLine("Trapetsiya usuli yordamida  $\int(x+1)dx$  [0,1] hisoblash");
        double a = 0; // boshlang'ich nuqta
        double b = 1; // oxirgi nuqta
        int n = 10; // bo'linmalar soni
        double h = (b - a) / n; // qadam kattaligi
        double sum = (f(a) + f(b)) / 2; // chegaraviy qiymatlar
        // Oraliq nuqtalardagi yig'indi
        for (int i = 1; i < n; i++)
        {
            double x = a + i * h;
            sum += f(x);
        }
        double integral = h * sum;
        Console.WriteLine($"Natija: {integral}"); // 1.5 chiqishi kerak
    }
}
```


Natija:

```
Trapetsiya usuli yordamida  $\int(x+1)dx$  [0,1] hisoblash
Natija: 1.5000000000000002
```

Izoh: natija "Replit (C# uchun onlayn IDE)" da olindi

sayt manzili  <https://replit.com/languages/csharp>

$\int_0^1 (x+1)dx$ aniq integralni trapetsiya usuli yordamida hisoblashning Python dagi dasturi.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from IPython.display import Image
def f(x):
    return x + 1 # f(x) = x + 1
x = np.linspace(0, 1, 100)
y = f(x)
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(x, y, 'b-', linewidth=2, label='f(x) = x + 1')
plt.fill_between(x, y, color='skyblue', alpha=0.3)
plt.title('∫(x+1)dx [0,1]', fontsize=14)
plt.xlabel('x', fontsize=12)
plt.ylabel('f(x)', fontsize=12)
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.savefig('integral_plot.png', bbox_inches='tight')
plt.close()
def trapezoidal_rule(a, b, n):
    h = (b - a) / n
    total = (f(a) + f(b)) / 2
    for i in range(1, n):
        total += f(a + i * h)
    return h * total
```

```

result = trapezoidal_rule(0, 1, 10)
print(f"Trapetsiya usuli natijasi: {result:.4f}")
print("\nGrafik 'integral_plot.png' faylida saqlandi.")

```

Natija:

```

> Environment updated. Reloading shell...
Trapetsiya usuli natijasi: 1.5000

Grafik 'integral_plot.png' faylida saqlandi.

```

Izoh: natija "Replit Python Online Compiler" da olindi

sayt manzili  <https://replit.com/languages/python3>

$\int_0^1 (x+1)dx$ aniq integralni trapetsiya usuli yordamida hisoblashning Matlab dagi dasturi.

```

a = 0;
b = 1;
n = 10;
h = (b - a) / n;
x = a:h:b;    % 0 dan 1 gacha 0.1 qadam bilan
y = x + 1;    % Funksiya
% Trapetsiyalar formulasi
integral = (h/2) * (y(1) + 2*sum(y(2:end-1)) + y(end));
% Grafikni chizish
figure;
hold on;

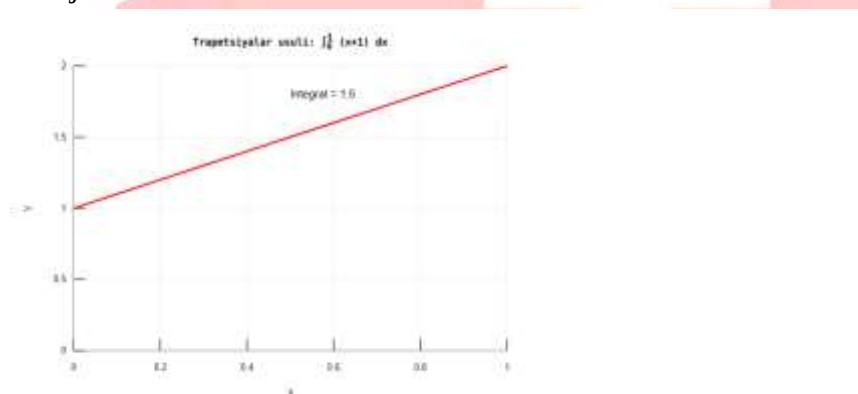
```

```

% Har bir trapetsiyani rang bilan to'ldirish
for i = 1:n
    x_trap = [x(i), x(i), x(i+1), x(i+1)];
    y_trap = [0, y(i), y(i+1), 0];
    fill(x_trap, y_trap, 'cyan', 'FaceAlpha', 0.3, 'EdgeColor', 'none');
end
% Funksiya chizig'i
plot(x, y, 'r-', 'LineWidth', 2);
% Formatlash
title('Trapetsiyalar usuli: \int_{0}^{1} (x+1) dx');
xlabel('x');
ylabel('y');
grid on;
axis([a, b, 0, 2]);
% Natijani ko'rsatish
text(0.5, 1.8, ['Integral = ', num2str(integral)], 'FontSize', 12);

```

Natija:



Izoh: natija ”[Octave Online](https://octave-online.net/)” da olindi

sayt manzili  <https://octave-online.net/>

Xulosa

Ushbu maqolada aniq integrallarni hisoblashning trapetsiyalar usuli ko'rib chiqildi. Bu usul ayniqsa analitik yechimga ega bo'lmagan yoki murakkab funksiyalar uchun qo'llaniladigan samarali hisoblash metodlaridan biridir. Tadqiqot natijalari shuni ko'rsatdiki:

1. Trapetsiyalar usuli - geometrik talqin asosida ishlab chiqilgan oddiy, ammo kuchli

hisoblash algoritmidir.

2. Dasturiy amaliyot - C# va Python tillarida va MATLAB da yozilgan dasturlar usulning amaliy qo'llanilishini va yuqori hisoblash aniqligini ko'rsatdi.

3. Xatolik tahlili - metodning xatoligi $O(h^2)$ tartibda ekanligi aniqlandi, ya'ni qadamni kichraytirish orqali hisoblash aniqligini oshirish mumkin.

Natijada, trapetsiyalar usuli muhandislik hisob-kitoblari, ilmiy tadqiqotlar va turli amaliy masalalarda qo'llash uchun qulay va ishonchli vosita ekanligi isbotlandi. Kelajakda ushbu metodni parallel hisoblash texnologiyalari bilan birlashtirish orqali uning samaradorligini yanada oshirish mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Abdullayev R.A., Isroilov M.I. "Sonli usullar" – T.: "O'qituvchi", 2018. – 245 b. (Trapetsiyalar usuli va uning sonli analizdagi o'rni haqida asosiy ma'lumotlar)

2. Chapra S.C., Canale R.P. "Numerical Methods for Engineers", 7th ed. – McGraw-Hill, 2015. – 960 p. (Trapetsial rule and its error analysis in Chapter 21)

3. Xudoyberganov G., Tojiboyev O. "Dasturlash asoslari: C# va Python misollarida" – T.: "Innovatsiya", 2021. – 318 b.

(Integrallash algoritmlarini dasturlashga oid amaliy misollar)

4. Quarteroni A., Saleri F. "Scientific Computing with MATLAB and Octave", 4th ed. – Springer, 2014. (Numerical integration implementations in Chapter 9)

5. O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim standartlari. "Axborot texnologiyalari" fan dasturi – 2023. (Dasturlash tillarida sonli usullarni o'qitish metodikasi)

6. Forsythe G.E., Malcolm M.A., Moler C.B. "Computer Methods for Mathematical Computations" – Prentice-Hall, 1977. (Classical reference on error estimation in numerical integration)

7. <https://replit.com/languages/python3>

8. <https://replit.com/languages/csharp>

9. <https://octave-online.net/>