MATRITSA TUSHUNCHASI

Norboyeva Dildora Berdiboyevna
Toshkent iqtisodiyot va sanoat texnikumi

Annotatsiya: *Ushbu maqola orqali biz matritsa tushunchasi qachon va kim tomonidan kirilgani, matritsaning qanday sohalarda qo'llanilishi hamda nima sababdan qanday usullarda foydalanilishini bilib olamiz. Matritsaning turlari, hisoblash usullarini o'rganib olamiz.*

Kalit so'zlar: *matritsa, matritsaning elementi, kvadrat matritsa, nol matritsa, birlik matritsa, diagonal matritsalar, xos va xosmas matritsalar, matritsalar yig`indisi, ayirmasi, ko`paytmasi, teskari matritsa.*

Matritsaning o'lchami uning satrlari soni va ustunlari soni bilan aniqlanadi. Matritsaning o'lchamini ifodalash uchun $m \times n$ belgi ishlatiladi. Bu belgi matritsaning m ta satr va n ta ustundan tashkil topganini bildiradi. Matritsaning o'zi lotin alifbosining bosh harflaridan biri bilan belgilanadi va uning elementlari jadvali kichik qavsga olinadi.

$a_{me,j}$ $(i = 1,2,\dots \mathrm{m},\ \ j = 1,2,\dots \mathrm{n})$ sonlar matritsaning elementlari deb ataladi. Elementning birinchi indeksi *me* matritsa elementi turgan satr nomerini, ikkinchi indeksi *j* esa ustun nomerini ko`satadi.

A matritsaning i -satr va j -ustunda joylashgan elementi a_{ij} bilan belgilanadi.

$A = (a_{ij})$, $(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$ yoki $A = \| a_{ij} \|$

, $(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$ yozuv A matritsa a_{ij} elementlardan tashkil topganini bildiradi:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad A = \| a_{ij} \| = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

$1 \times n$ o'lchamli $A = (a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n})$ matritsa *satr* *matritsa* yoki *satr-vektor* deyiladi.

$m\times 1$ o‘lchamli $A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ matritsa *ustun matritsa* yoki *ustun-vektor* deyiladi.

$n\times n$ o‘lchamli maritsa (satrlari soni ustunlari soniga teng, ya’ni $m=n$ matritsa) n-*tartibli kvadrat matritsa* deyiladi.

Kvadrat matritsaning chap yuqori burchagidan o‘ng quyi burchagiga yo‘nalgan $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elementlaridan tuzilgan diagonaliga uning *bosh diagonali*, o‘nq yuqori burchagidan chap quyi burchagiga yo‘nalgan $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \dots, a_{n1}$ elementlardan tuzilgan diagonaliga uning *yordamchi diagonali* deyiladi.

Bosh diagonalidan yuqorida (pastda) joylashgan barcha elementlari nolga teng bo‘lgan

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \left(A'=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \right)$$

matritsa *yuqoridan uchburchak* (*quyidan uchburchak*) *matritsa* deyiladi.

Bosh diagonalda joylashmagan barcha elementlari nolga teng bo‘lgan

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsa *diagonal matritsa* deyiladi.

Diagonal matritsalarning xossasi: Ikkita diagonal matritsaning yigindisi va ko`paytmasi yana diagonal matritsadir.

Barcha elementlari birga teng bo‘lgan diagonal matritsa *birlik matritsa* deyiladi va *me* harfi bilan belgilanadi.

Istalgan n-tartibli A kvadrat matritsa uchun ushbu tenglik o‘rinli: $I\cdot A = A\cdot I = A$

Barcha elementlari nolga teng bo‘lgan ixtiyoriy o‘lchamdagi matritsa *nol matritsa* deyiladi va O harfi bilan belgilanadi.

A matritsada barcha satrlarni mos ustunlar bilan almashtirish natijasida hosil

qilingan A^T matritsa A matritsaning *transponirlangan matritsasi* deyiladi: $(a_{ij})^T = (a_{ji})$.

Agar $A = A^T$ bo‘lsa, A matritsa *simmetrik,* agar $A_T = -A$ bo`lsa, *qiya simmetrik matritsa* deyiladi. Simmetrik matritsaning bosh diagonalga nisbatan simmetrik joylashgan elementlari teng, qiya simmetrik matritsaning bunday elementlari esa qarama-qarshidir. Qiya simmetrik matritsaning barcha diagonal elementlari nolga teng.

Bir xil o‘lchamli $A=(a_{ij})$ va $B=(b_{ij})$ matritsalarning barcha mos elementlari teng, ya’ni $a_{ij} = b_{ij}$ bo‘lsa, ular *teng matritsalar* deyiladi va $A = B$ deb yoziladi:

$$\boxed{A = B \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij} \quad \text{barcha } i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n} \text{ uchun}}$$

Matritsalarni qo‘shish

Matritsalarni qo‘shish va ayirish amallari *bir xil o‘lchamli matritsalar* uchun kiritiladi. Bunda yig‘indi matrisa qo‘shiluvchi matritsalar bilan bir xil o‘lchamga ega bo‘ladi.

Ta’rif. $A=(a_{ij})$ va $B=(b_{ij})$ *matritsalarning yig‘indisi* deb, elementlari $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ kabi aniqlanadigan $C = A + B$ matritsaga aytiladi

$$\boxed{C = A + B \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.}$$

Matritsalarni qo‘ish amali ushbu xossalarga ega:

1⁰. kommutativlik xossasi: $A + B = B + A$

2⁰. assotsiativlik xossasi: $(A + B) + C = A + (B + C)$

3⁰. qo`shish amaliga nisbatan distributivlik xossasi: $\lambda \cdot (A + B) = \lambda A + \lambda B$

4⁰. sonlarni qo`shishga nisbatan distributivlik xossasi:

$$(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$$

Matritsani songa ko`paytirish va matritsalarni qo`shish amalining yuqorida aytilgan xossalari bu amallarning ta’riflari, haqiqiy sonlarni qo`shish va ko`paytirish amallarining kommutativlik va assotsiativlik xossalari hamda ko`paytirishning qo`shishga nisbatan distributuvlik xossasining natijasidir.

Matritsalarni ayirish.

T**a'rif**. $A=(a_{ij})$ va $B=(b_{ij})$ *matritsalarning ayirmasi* deb $C=A-B=A+(-B)$ matritsaga aytiladi. Bunda C matritsaning elementlari $c_{ij}=a_{ij}+(-b_{ij})=a_{ij}-b_{ij}$ kabi topiladi.

$$\boxed{C=A-B \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}\,.}$$

Matritsalarni ko`paytirish

$A-$satr martitsa va $B-$ustun matritsa bir xil sondagi elementlarga ega bo'lsin deylik. Bunda A satrning B ustunga ko'paytmasi quyidagicha aniqlanadi:

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ \dots \\ b_{1n}\end{pmatrix}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+\dots+a_{1n}b_{1n},$$

ya'ni ko'paytma matritsalarning mos elementlari ko'paytmalarining yig'indisiga teng bo'ladi.

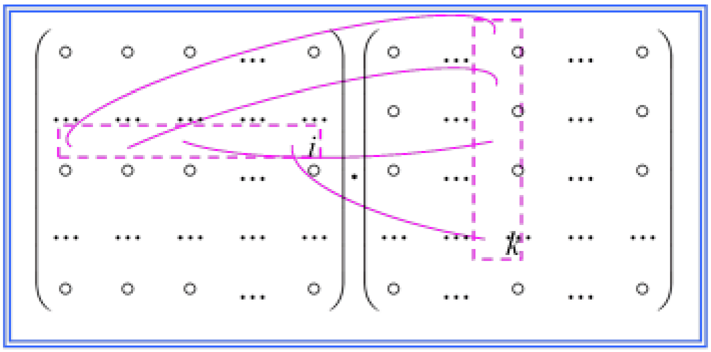
Matritsalarni ko'paytirishning bu qoidasi *satrni ustunga ko'paytirish qoidasi* deb yuritiladi.

mekki matritsani ko'paytirish amali *moslashtirilgan matritsalar* uchun kiritiladi. A matritsaning ustunlari soni B matritsaning satrlari soniga teng bo'lsa, A va B *matritsalar moslashtirilgan* deyiladi.

Ta'rif. $m\times p$ o'lchamli $A=(a_{ij})$ *matritsaning* $p\times n$ o'lchamli $B=(b_{jk})$ *matritsaga ko'paytmasi* AB deb, c_{ik} elementi A matritsaning i-satrini B matritsaning j-ustuniga satrni ustunga ko'paytirish qoidasi bilan, ya'ni

$$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\dots+a_{ip}b_{pk}=\sum_{r=1}^{p}a_{ir}b_{rk},\quad i=1,\dots,m,\quad k=1,\dots,n$$

(qo'shiluvchlari quyidagi sxemada keltirilgan) kabi aniqlanadigan $m\times n$ o'lchamli $C=(c_{ik})$ matritsaga aytiladi.



Umuman olganda matritsalarni ko‘paytirish nokommutativ, ya’ni $AB \neq BA$. Masalan, $1\times n$ o‘lchamli A matritsaning $n\times 1$ o‘lchamli B matritsaga AB ko‘paytmasi sondan, ya’ni 1×1 o‘lchamli matritsadan iborat bo‘lsa, BA ko‘paytmasi n - tartibli kvadrat matritsa bo‘ladi.

Bir xil tartibli A va B kvadrat matritsalar uchun $AB = BA$ bo‘lsa, A va B matritsalar *kommutativ matritsalar*, $AB - BA$ ayirma esa *kommutator* deyiladi.

Matritsalarni ko‘paytirish amali ushbu xossalarga ega:

1°. A matritsa $m\times n$ o‘lchamli va B,C matritsalar $n\times p$ o‘lchamli bo‘lsa, $A(B+C) = AB + AC$ bo‘ladi;

2°. A matritsa $m\times n$ o‘lchamli va B,C matritsalar $n\times p$ o‘lchamli bo‘lsa, $A(B+C) = AB + AC$ bo‘ladi;

3°. A,B,C matritsalar mos ravishda $m\times n$, $n\times p$, $p\times q$ o‘lchamli bo‘lsa, $A(BC) = (AB)C$ bo‘ladi;

4°. (4) A,B,I,O moslashtirilgan matritsalar va λ,μ skalyar sonlar bo‘lsa, u holda:

1) $(\lambda A)(\mu B) = (\lambda\mu)(AB);$ 2) $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB);$

3) $AI = IA = A;$ 4) $AO = OA = O;$

5) $(AB)^T = B^T A^T.$

5°. $A,I,O - n$ - tartibli kvadrat matritsalar va p,q manfiy bo‘lmagan butun sonlar bo‘lsa, u holda:

1) $A^p A^q = A^{p+q};$ 2) $(A^p)^q = (A)^{pq};$ 3) $A^1 = A;$ 4) $A^0 = I.$

Teskari matritsa

Bizga ma’lumki I birlik matritsa va $A \cdot I = I \cdot A = A$ tenglik o`rinli.

1-Ta'rif. A matritsa uchun $A \cdot B = I$ tenglikni qanoatlantiruvchi B matritsa A ga *teskari* matritsa deyiladi va u $B = A^{-1}$ ko`rinishda belgilanadi.

2-Ta'rif. Barcha satr vektorlari chiziqli erkli matritsa *xosmas* (aynimagan) matritsa, barcha satr vektorlari chiziqli bog`langan matritsa *xos* (aynigan) matritsa deb ataladi.

Xosmas matritsalarga doir quyidagi ikkita teoremani isbotsiz keltiramiz.

1-Teorema. Xosmas matritsani elementar almashtirishlar yordamida birlik matritsaga keltirish mumkin.

2-Teorema. Xosmas matritsaga teskari matritsa mavjud va yagonadir. (Teoremaning isbotlari A.G.Kuroshning «Oliy algebra kursi» kitobida keltirilgan).

Teskari matritsani topish.

Aytaylik, $n-$tartibli kvadrat, xosmas A matritsa berilgan bo`lsin:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

A matritsaga teskari B matritsani topish uchun, uni quyidagi ko`rinishda yozamiz:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} & 1 & 0 \dots 0 \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} & 0 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} & 0 & 0 \dots 1 \end{array}\right) \quad (1)$$

Chap tomonida berilgan A matritsa, o`ng tomonda $I$ birlik matritsa yozilgan. Bu ma tritsalarning ikkalasiga bir vaqtda $A$ matritsani birlik $I$ matritsaga keltiradigan satrlar b o`yicha elementar almashtirishlar qo`llaymiz.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 \dots 0 & b_{11} & b_{12} \dots b_{1n} \\ 0 & 1 \dots 0 & b_{21} & b_{22} \dots b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 1 & b_{n1} & b_{n2} \dots b_{nn} \end{array}\right) \quad \dots\dots.(2)$$

(2) ning o`ng tomonidagi matritsa xuddi $A$ ga teng teskari $B$ matritsani if odalaydi, ya'ni $A \cdot B = I$ bo`ladi. A matritsa o`z navbatida $B$ ga teskari b o`lganligi sababli $B \cdot A = I$ ham bajariladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Oliy matematika. Barcha texnika yo'nalishlari uchun darslik. I jild [Matn] darslik/Sh. Xurramov. Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi. -T.: Cho'lpon nomidagi NMIU, 2018 -492b.

2. Algebra va matematika analiz asoslari: Akad.litseylar uchun darslik / A. U Abduhamidov, H. A. Nasimov, U. M. Nosirov, J.H. Husanov H. A. Nasimovning umumiy tahriri ostida; O'zR oliy v aorta maxsus ta'lim vazirligi, O'rta maxsus, kasbhunar ta'limi markazi. 10-nashr. - T.: O'qituvchi, 2011.

3. Д. Юнусова, А. Юнусов "Флгебра ва сонлар назарияси" Тошкент - 2007.