TENGLAMALARNI YECHISHNING YUQORI TARTIBLI ITERATSION METODLARI

Ismoilov Axrorjon
Farg'ona davlat universiteti amaliy matematika va informatika kafedrasi katta o'qituvchisi. Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori(PHD)
ismoilovaxrorjon@gmail.com
Mo'ydinjonov Samandar O'tkirjon o'g'li
Farg'ona Davlat Universtiteti 3- kurs talabasi
Samandar6420@gmail.com

Annotatsiya: *Ushbu matnda iteratsion metodlarning aniqligi va konvergensiya tezligini oshirish masalasi ko'rib chiqiladi. Dastlab, oddiy iteratsiya metodining xatolik xususiyatlari tahlil qilinib, xatolikning ketma-ketlikda qanday kamayib borishi ifodalanadi. Keyinchalik yuqori tartibli iteratsion metodlarga o'tilib, ayniqsa Chebishev metodi alohida tahlil qilinadi. Ushbu metodda Teylor qatorlari yordamida teskari funksiyadan foydalanish orqali 2-, 3-, va 4-tartibli iteratsiyalar quriladi. Har bir tartib uchun aniq iteratsion formulalar keltirilib, xatoliklarning kamayish tezligi baholanadi. Xususan, Chebishev metodining juda tez yaqinlashish qobiliyatiga ega ekani isbotlanadi.*

Kalit so'zlar: *Iteratsion metod, xatolik bahosi, nyuton metodi, yaqinlashish tartibi, chebishev metodi, teylor qatorlari, yuqori tartibli iteratsiya, monotonlik, teskari funksiya, konvergensiya tezligi, ε (epsilon) xato bahosi, geometrik progressiya*

Abstract: *This text addresses the problem of improving the accuracy and convergence rate of iterative methods. Initially, the error characteristics of the simple iterative method are analyzed, and the manner in which the error decreases in the sequence is described. Subsequently, higher-order iterative methods are introduced, with particular emphasis on the Chebyshev method. In this method, 2nd-, 3rd-, and 4th-order iterations are constructed using Taylor series and the inverse function. Precise iterative formulas for each order are provided, and the rate of error reduction is evaluated. Specifically, the Chebyshev method's very fast convergence capability is demonstrated.*

Keywords: *Iterative method, error estimate, Newton's method, order of convergence, Chebyshev method, Taylor series, higher-order iteration, monotonicity, inverse function, convergence rate, ε (epsilon) error bound, geometric progression*

Аннотация: *В данном тексте рассматривается вопрос повышения точности и скорости сходимости итерационных методов. Сначала анализируются свойства ошибки простого итерационного метода и описывается, как ошибка уменьшается в последовательности. Далее переходят к итерационным методам более высокого порядка, особенно подробно рассматривается метод Чебышева. В* *этом методе с помощью рядов Тейлора и использования обратной функции строятся итерации второго, третьего и четвёртого порядка. Для каждого порядка приводятся точные итерационные формулы и оценивается скорость уменьшения ошибки. В частности, доказывается высокая способность метода Чебышева к быстрому приближению.*

Ключевые слова: *Итерационный метод, оценка ошибки, метод Ньютона, порядок сходимости, метод Чебышева, ряды Тейлора, итерация более высокого порядка, монотонность, обратная функция, скорость сходимости, погрешность ε (эпсилон), геометрическая прогрессия*

Umumiy mulohazalar. Avval oddiy iteratsiya metodi bilan tanishganimizda ko‘rgan edikki, $x_n (n=0,1,2,\dots)$ taxminiy qiymatlar ketma-ketligi ξ *yechimga yaqin bo‘lsa*, xato $\varepsilon_n = \xi - x_n$ umumiy holda quidagi ko‘rinishga ega:

$$\varepsilon_n = \varphi'(\xi)\varepsilon_n - 1$$

Qonun bilan o‘zgaradi, ya’ni nnn-qadamdagi xato (n−1)(n-1)(n−1)-qadamdagi xatoga proporsionaldir. Agar $|\varphi'(\xi)|<1$ bo‘lsa, u holda ε_n xato maxraji $\varphi'(\xi)$ ga teng bo‘lgan geometrik progressiya qonuni bo‘yicha o‘zgaradi.

Shunday metodlar ham mavjudki, ularda nnn-qadamdagi xato (n−1)(n-1)(n−1)-qadamdagi xatoning mmm-darajasiga proporsionaldir (m≥2), ya’ni

$$\varepsilon_n = \Phi(\xi)\varepsilon_{n-1}^m$$

Masalan, Nyuton metodida xatolarning o‘zgarish qonuni

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2}\frac{f''\xi}{f'\xi}\varepsilon_{n-1}^2$$

Kabi bo‘ladi. Bu yerda nnn-qadamdagi xato (n−1)(n-1)(n−1)-qadamdagi xatoning kvadratiga proporsionaldir, shuning uchun ham bu yerda xato kvadratik qonun bilan o‘zgaradi deb aytiladi.

Endi iteratsiya tartibi degan tushunchani umumiy holda kiritamiz. Agar

$$\varphi'(\xi) = \varphi''(\xi) = \cdots = \varphi^{(p-1)}(\xi) = 0, \varphi^{(p)}(\xi) \neq 0$$

bo‘lsa, u holda

$$x_n = \varphi(x_{n-1})$$

iteratsion jarayon p**-tartibga ega** yoki uning yaqinlashish tartibi p ga teng deyiladi. Agar ξ ildiz atrofida $\varphi(x)$ funksiyaning p-tartibli uzluksiz xususiyatlarga ega bo‘lsa, u holda Teylor formulasi asosida

$$\varphi(x) = \varphi(\xi) + \sum_{k=1}^{p-1}\frac{\varphi^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k + \frac{\varphi^{(p)}(\eta)}{p!}(x-\xi)^p,$$

Bu yerda $\eta \in (x, \xi)$.

Bundan iteratsiyaning tartibi p bo‘lganda

$$\varphi(x)-\xi=\frac{\varphi^{(p)}(\eta)}{p!}(x-\xi)^p$$

O‘z navbatida

$$x_n-\xi=\frac{\varphi^{(p)}(\eta)}{p!}(x_{n-1}-\xi)^p$$

Kelib chiqadi

Bu paragrafda f(x)=0 tenglamaning ildizlarini topish uchun yuqori tartibli iteratsion metodni qurishni Chebeshov metodini ko‘rib o‘tamiz.

Chebishev metodi. P.L Chebeshyev 1833 yilda berilgan $f(x)$ funksiyaga teskari bo‘lgan $g(y)$ funksiyani Teylor formulasi yordamida tasvirlash yo‘li bilan yuqpri tartibli iteratsiyani qurish metodini taklif etdi

Faraz qilaylik, $f(x)=0$ tenglamaning x=ξ ildizi [a, b] oraliqda yotsin va $f(x)$ funksiyasi hamda uning yetarlicha yuqori tartibli hosilalari uzluksiz bo‘lsin. Bundan tashqari, bu oraliqning barcha nuqtalarida $f'(x)\neq 0$ bo‘lsin.

U holda $f'(x)$ bu oraliqda o‘z ishorasini saqlaydi va f(x)f(x)f(x) monoton funksiya bo‘lib, $x=g(y)$ teskari funksiyaga ega bo‘ladi.

Teskari funksiya $g(y)$ ning o‘zgarish sohasi[c, d] da aniqlangan bo‘lib, $f(x)$ qancha uzluksiz xossalarga ega bo‘lsa, u ham shuncha uzluksiz xossalarga ega bo‘ladi. Teskari funksiyaning tarifiga ko‘ra

$$x\equiv g(f(x))(x\in|a,b|); \qquad y\equiv f(g(x))(y\in|c,d|); \qquad (1)$$

Demak

$$\xi=g(0) \qquad (2)$$

Agar $y\in[c,d]$ bo‘lsa, u xolda Teylor formulasidan

$$\xi=g(0)=g(Y-\gamma)=g(Y)+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\frac{g^{(k)}(y)}{k!}\gamma^k+(-1)^p\frac{g^{(p)}(\eta)}{\eta!}\gamma^p \quad (3)$$

Bu yerda η soni 0 va γ orasida yotadi. Yoki γ o‘rniga $f(x)$ ni qo‘yib va $g(y)=x$ ni nazarda tutib,

$$\xi=x+\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^k\frac{g^{(k)}(f(x))}{k!}f^{(k)}(x)+(-1)^p\frac{g^{(p)}(\eta)}{p!}f^p(x) \qquad (4)$$

ni xosil qilamiz. Agar

$$\varphi_p(x)=x+\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^k\frac{g^{(k)}(f(x))}{k!}f^{(k)}(x)$$

deb belgilab olsak, u xolda

$$x=\varphi_p(x) \qquad (5)$$

Tenglama uchun $x=\xi$ yechim bo‘ladi, chunki

$$\varphi_p(\xi)=\xi+\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^k\frac{g^{(k)}(f(\xi))}{k!}f^{(k)}(\xi)=\xi$$

Bundan

$$\varphi_p^{(j)}(\xi)=0,\ \ j=1,\ \overline{p-1},$$

bo‘lganligi sababli

$$x_{n+1}=\varphi_p(x_n)()\,n=0,1,2,...;x_0\in[a,b]) \qquad (6)$$

Iteratsion jarayon p-tartibli bo‘ladi. Agar x_0 ξ ga yaqin bo‘lsa, u xolda (6) bilan aniqlangan $\{x_n\}$ ketma-ketlik ξ ga yaqinlashadi. Xaqiqatdan xam, $\varphi_p^{'}(\xi)=0$ bo‘lganligi uchun ξ ning shunday atrofi topiladiki, u yerda $|\varphi_p^{'}(x)|\le q<1$ bo‘ladi. Bundan esa $x_0\xi$ ga yetarlicha yaqin bo‘lsa $\{x_n\}$ iteratsion ketma-ketlikning yaqinlashishi kelib chiqadi.

Endi $\varphi_p(x)$ ning $f(x)$ va uning xosilalari orqali oshkor ifodasini topamiz. Buning uchun (1) ayniyatdan ketma-ket xosilalar olamiz:

$$\begin{cases} g'(f(x))f'(x)=1, \\ g''(f(x))f'^2(x)+g'(f(x))f''(x)=0 \\ g'''(f(x))f'^3(x)+3g''(f(x))f'(x)f''(x)+g'(f(x))f'''(x)=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \qquad (7)$$

Bu yerda biz ketma-ket $g'\left(f(x)\right),\ g''\left(f(x)\right),\ \ldots,\ g^{(p-1)}\left(f(x)\right)$ larni vas hu bilan birga $\varphi_p(x)$ ni aniqlaymiz. (6) iteratsiya jarayoni p ning bir necha konkret qiymatlarida oshkor ko‘rinishga keltiramiz. $p=2$ bo‘lganida

$$\varphi_{2(x)}=x-\frac{f(x)}{f'(x)}\text{va } x_{\{n+1\}}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (8)$$

Biz keyinchalik ko‘ramizki, bu jarayon Nyuton jarayoni bilan ustma-ust tushadi. $p=3$ bo‘lganida (5) va (7) dan

$$\varphi_{3(x)}=x-\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f''(x)f^2(x)}{2[f'(x_n)]} \qquad (9)$$

kelib chiqadi. $p=4$ uchun

$$\varphi_4(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f''(x)f^2(x)}{2[f'(x)]}-\frac{f^3(x)}{12}\cdot\frac{3f''^2(x)-f'(x)f'''(x)}{[f'(x)]^5}$$

va

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}-\frac{f''(x_n)f^2(x_n)}{2[f'(x_n)]}-\frac{3f''^2(x_n)-f'(x_n)f'''(x_n)}{[f'(x_n)]^5} \qquad (10)$$

ni xosil qilamiz. Bu iteratsion jarayonlar mos ravishda 2,3 va 4- tartibli iteratsiyalar bo‘ladi,

Endi $\varepsilon_n=\xi-x_n$ xatoning nolga intilish teziligini baxolaymiz. Buning uchun (4) tenglikda $x=x_n$ deb olib, (6) ni nazarda tutib, quidagini xosil qilamiz:

$$\xi-x_{n+1}=\frac{(-1)^p g^{(p)}(f(\bar{x}))}{p!}f^p(x_n) \qquad (11)$$

bu yerda $\tilde{x}$ ξ bilan x_n orasida yotadi, $f(\xi) = 0$ bo‘lganligi uchun

$$f(x_n) = -[f(\xi) - f(x_n)] = -(\xi - x_n)f'(\bar{x}) \qquad (12)$$

($\bar{x}$ ham ξ bilan x_n orasida yotadi) (12) ni (11) ga qo‘yamiz:

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{g^p(f(\tilde{x}))}{p!}[f'(\bar{x})]^p\ \varepsilon_n^p \qquad (13)$$

Quidagi

$$q = \max_{\tilde{x},\bar{x}\epsilon[a,b]}\left|\frac{g^{(p)}(f(\tilde{x}))}{p!}[f'(\bar{x})]\right|$$

belgilashni kiritib, (13) dan

$$|\varepsilon_{n+1}| \le q|\varepsilon_n|^p \qquad (14)$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz. Bu tengsizlikni ketma-ket qo‘llab, quidagini xosil qilamiz:

$$|\varepsilon_n| \le q^{1+p+\dots+p^{n-1}}|\varepsilon_o|^{p^n} = (q|\varepsilon_o|)^{\frac{p^n-1}{p-1}}|\varepsilon_o|^{\frac{p^n(p-2)+1}{p-1}}$$

Agar $|\varepsilon_o| < 1$ va q $|\varepsilon_o| = \omega < 1$ bo‘lsa, u holda

$$|\varepsilon_n| \le \omega^{\frac{p^n-1}{p-1}} \qquad (15)$$

bo‘ladi, bu esa (6) iteratsiyaning nihoyatda tez yaqinlashishini ko‘rsatadi. Xususiy holda $\omega \le 10^{-1}$ va $|\varepsilon_o| < 1$ bo‘lsa, yuqoridagi (8), (9) va (10) iteratsiyalar uchun mos ravishda quidagilarga ega bo‘lamiz:

$p = 2$ uchun

$|\varepsilon_1| \le 10^{-1}$, $|\varepsilon_2| \le 10^{-3}$, $|\varepsilon_3| \le 10^{-7}$, $|\varepsilon_4| \le 10^{-15}$

$p = 3$ uchun

$|\varepsilon_1| \le 10^{-1}$, $|\varepsilon_2| \le 10^{-4}$, $|\varepsilon_3| \le 10^{-13}$, $|\varepsilon_4| \le 10^{-40}$

$p = 4$ uchun

$|\varepsilon_1| \le 10^{-1}$, $|\varepsilon_2| \le 10^{-5}$, $|\varepsilon_3| \le 10^{-18}$, $|\varepsilon_4| \le 10^{-85}$

Demak $\omega \le 0.1$bo‘lganda uchinchi iteratsiyaning o‘zi bizga kerakligi aniqlikni beradi.

Xulosa: Iteratsion metodlarning aniqligi va samaradorligi ularning tartibiga bog‘liq. Oddiy metodlar faqat chiziqli konvergensiyani ta’minlasa, **Nyuton** va ayniqsa **Chebishev** kabi yuqori tartibli metodlar juda tez yaqinlashuvni kafolatlaydi. Chebishev metodi, Teylor qatorlariga tayanib, xatolikni har bir iteratsiyada sezilarli darajada kamaytiradi — bu esa aniq ildiz topish jarayonini tezlashtiradi. Shu bois, agar dastlabki taxmin yetarlicha yaxshi bo‘lsa, Chebishev metodining uch yoki to‘rt qadamli iteratsiyasi ham yuqori aniqlikni ta’minlaydi. Bu metod murakkab funksiyalar uchun samarali hisoblanadi va amaliy hisoblashlarda katta ahamiyatga ega.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Alberg Dzh., Nilson E., Uolsh Dzh. Teoriya splinev i ikh prilozheniya. M., “Mir”, 1972.
2. Bakhvalov N. S. Chislennye metody, t. I, M., “Nauka”, 1973.

3. Bakhvalov N. S. Ob optimalnykh otsenkakh skorosti skhodimosti kvadraturnykh protsessov i metodov integrirovaniya tipa Monte-Karlo na klassicheskikh funktsiyakh, Sb. “Chislennye metody resheniya differentsialnykh i integralnykh uravneniy i kvadraturnye formuly”. M., “Nauka”, 1964 (5—6 3-betlar).

4. Berezin I. S., Zhidkov N. P. Metody vychisleniy, t. 1., izd. 3-e. M., “Nauka”, 1966.

5. Buslenko N. P. i dr. Metody statisticheskikh ispytaniy (metod Monte-Karlo). M., Fizmatgiz, 1962.

6. Varga R. Funktsional'nyy analiz i teoriya approksimatsii v chislennom analize. M., “Mir”, 1974.

7. Voevodin V. V. Chislennye metody algebry. Teoriya i algoritmy. M., “Nauka”, 1966.

8. Gelfond A. O. Ischislenie konechnykh raznostey, 3-e ispravl. izd. M., “Nauka”, 1967.

9. Goncharov V. L. Teoriya interpolirovaniya i priblizheniya funktsiy, 2-e pererabotannoe izd. M., Gostekhizdat, 1954.

10. Daugavet I. K. Vvedenie v teoriyu priblizheniy funktsiy, izd. LGU, Leningrad, 1977.