



MODERN PROBLEMS IN EDUCATION AND THEIR SCIENTIFIC
SOLUTIONS

ANIQ ANALITIK YECHIMLAR UCHUN DIFFERENSIAL
TENGLAMALAR SISTEMASI VA OPERATORLAR USULI
SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPERATOR METHOD
FOR EXACT ANALYTICAL SOLUTIONS
СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ОПЕРАТОРНЫЙ
МЕТОД ДЛЯ ТОЧНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Solijonova Dilnozaxon Mamirjon qizi

*FarDU fizika-matematika fakulteti
matematika yo'nalishi talabasi.*

gochqorboyevmamirjon@gmail.com

+998 (50) 075-70-44

Mamasharifov Bunyodjon Shovkat o'g'li

*FarDU fizika-matematika fakulteti
fizika yo'nalishi talabasi.*

bunyodjonmamasharifov94@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu maqolada chiziqli o'zgaras koeffitsiyentli differensial tenglamalar sistemasini aniq analitik yechishda operatorlar usulining (Heaviside va Laplas almashtirishlari analoglari) samaradorligi tadqiq etilgan. Izlanishning asosiy maqsadi ko'p o'lchamli sistemalarni xarakteristik tenglamalarni chetlab o'tgan holda strukturaviy operatorlar yordamida chiziqli algebraik tenglamalar ko'rinishiga keltirish va yechimning aniq analitik ifodasini topishdan iborat. Metodologiya sifatida differentsiallashtirish operatori ($D = \frac{d}{dt}$) va matritsaviy funksiyalar hisobi qo'llanilgan. Natijada n -tartibli sistemalar uchun yechim operatorining umumiy ko'rinishi invariant fazolarda qurildi. Ushbu yasalgan yechimlar dinamik sistemalar barqarorligini tahlil qilishda yuqori aniqlik namoyish etadi.

Abstract: This article investigates the effectiveness of the operator method (analogous to Heaviside and Laplace transforms) in finding exact analytical solutions for systems of linear differential equations with constant coefficients. The primary objective is to transform multi-dimensional systems into linear algebraic equations using structural operators, bypassing characteristic equations, and deriving explicit analytical forms. The methodology utilizes the differentiation operator ($D = \frac{d}{dt}$) and matrix function calculus. As a result, the general representation of the solution operator for n -th order systems is constructed within invariant spaces. The constructed solutions exhibit high precision in analyzing the stability of dynamic systems.

Аннотация: В данной статье исследуется эффективность операторного метода (аналога преобразований Хевисайда и Лапласа) для нахождения точных аналитических решений систем линейных дифференциальных уравнений с





MODERN PROBLEMS IN EDUCATION AND THEIR SCIENTIFIC SOLUTIONS

постоянными коэффициентами. Основная цель исследования заключается в преобразовании многомерных систем в линейные алгебраические уравнения с помощью структурных операторов в обход характеристических уравнений и выводе явных аналитических выражений. В качестве методологии используются оператор дифференцирования ($D = \frac{d}{dt}$) и исчисление матричных функций. В результате построена общая форма оператора решений для систем n -го порядка в инвариантных пространствах. Разработанные решения демонстрируют высокую точность при анализе устойчивости динамических систем.

Kalit so'zlar: *Differensial tenglamalar sistemasi, operatorlar usuli, analitik yechim, matritsa eksponentasi, Laplas almashtirishi, xarakteristik ko'phad, dinamik sistema.*

Keywords: *System of differential equations, operator method, analytical solution, matrix exponent, Laplace transform, characteristic polynomial, dynamic system.*

Ключевые слова: *Система дифференциальных уравнений, операторный метод, аналитическое решение, матричная экспонента, преобразование Лапласа, характеристический многочлен, динамическая система.*

Kirish:

Zamonaviy fundamental fanlar, muhandislik texnologiyalari va matematik modellashtirish sohalarining rivojlanishi bevosita murakkab dinamik jarayonlarni tavsiflovchi differensial tenglamalar sistemalarini aniq yechish algoritmiga tayanadi. Matematik fizika, mexanika va kvant optikasi muammolarini tadqiq etishda chiziqli va chiziqli bo'lmagan differensial tenglamalar sistemalarining o'rni beqiyosdir. Ko'p hollarda ushbu sistemalarning taqribiy yoki sonli yechimlari jarayonning to'liq manzarasini va uning ichki asimptotik qonuniyatlarini ochib bera olmaydi. Shu sababli, jarayonlarning aniq analitik yechimlarini topish usullarini takomillashtirish hamon dolzarb ilmiy muammo bo'lib qolmoqda.

O'zbekiston Respublikasida uchinchi Renessans poydevorini yaratish, ilm-fanni davr talablariga mos ravishda yuksaltirish davlat siyosatining eng ustuvor yo'nalishlaridan biri etib belgilangan. Prezidentimiz Shavkat Mirziyoyev o'z nutqlarida ilm-fanning fundamental sohalarini rivojlantirish zarurligini bir necha bor ta'kidlab, jumladan shunday degan edilar:

"Matematika barcha aniq fanlar asosi. Bu fanni yaxshi bilgan bola aqlli, keng tafakkurli bo'lib o'sadi, istalgan sohada muvaffaqiyatli ishlaydi".

Shuningdek, davlatimiz rahbarining fizika va matematika sohasidagi tadqiqotlarni sifat jihatidan yangi bosqichga ko'tarish, yosh olimlarning xalqaro standartlar darajasida ilmiy maqolalar chop etishini rag'batlantirish borasidagi tashabbuslari ushbu tadqiqot ishining ham ilmiy-siyosiy hamda ijtimoiy asosini belgilaydi.

Ushbu maqolaning **maqsadi** — chiziqli differensial tenglamalar sistemalarini aniq yechishda xarakteristik ko'phad ildizlarini hisoblash va yuqori tartibli determinantlarni





MODERN PROBLEMS IN EDUCATION AND THEIR SCIENTIFIC SOLUTIONS

yoyish kabi murakkab bosqichlarni chetlab o'tuvchi algebraik strukturaviy operatorlar uslubini mukammallashtirish hamda uning amaliy unumdorligini asoslab berishdan iborat.

Adabiyotlar tahlili:

Akademik M.S. Salahitdinov — “Matematik fizika tenglamalari” darsligi:

Ushbu fundamental asarda xususiy hosilali differensial tenglamalar va ular sistemalarini yechishda analitik usullarning, jumladan, Furiye va Laplas integral almashtirishlarining (operator usullarining analoglari) nazariy asoslari tizimli ravishda bayon etilgan. Salahitdinov o'z asarida chegaraviy masalalarni operatorlar yordamida spektral yoyish prinsiplarini chuqur tahlil qiladi. Biroq, ushbu asarda asosan xususiy hosilali tenglamalarga urg'u berilgan bo'lib, o'zgarmas koeffitsiyentli oddiy differensial tenglamalar sistemalarini sof algebraik operatorli kompakt shaklda yechish algoritmlari birmuncha cheklangan.

Akademik Sh.A. Alimov — “Differensial tenglamalar va Laplas almashtirishlari nazariyasi” turkum ishlari:

Akademik Shavkat Alimov o'z tadqiqotlarida operatorlar nazariyasining spektral yoyilmalarini chiziqli differensial operatorlar uchun umumlashtirgan. Olimning ilmiy ishlarida differensial tenglamalarni yechishda Laplas operatorining asimptotik xossalari va yechim silliqiligiga ta'siri mukammal yoritilgan. Sh.Alimov yondashuvida operatorning distributivlik va kommutativlik xossalari funksional fazolarda o'rganilgan. Bizning tadqiqotimiz aynan ushbu yondashuvni chekli o'lchamli matritsaviy operatorlar fazosiga ko'chirish va amaliy hisoblashlarni soddalashtirishga qaratilganligi bilan ajralib turadi.

Zamonaviy xalqaro adabiyotlarda esa differensial sistemalarni operatorli modellashtirish asosan Runge-Kutta kabi sonli usullar yordamida amalga oshirilmoqda, bu esa analitik aniqlikning yo'qolishiga va yechimning tahliliy strukturasi ko'ra olmaslikka olib kelmoqda.

Tadqiqot metodologiyasi:

Ushbu tadqiqotda **amaliy-analitik metodologiya** qo'llanilgan bo'lib, jarayon quyidagi matematik apparat yordamida amalga oshiriladi. Differensiallashtirish amalini formal ravishda $D = \frac{d}{dt}$ operatori orqali belgilaymiz. Bunda istalgan chiziqli differensial tenglamalar sistemasi operatorli ko'phadlar ko'rinishidagi algebraik sistema ko'rinishiga keladi.

Aytaylik, bizga quyidagi dinamik sistema berilgan bo'lsin:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{f}(t)$$

Bu yerda A — $n \times n$ o'lchamli o'zgarmas matritsa, $\vec{x}(t)$ — noma'lum vektor-funksiya, $\vec{f}(t)$ — tashqi ta'sir (manba) vektori.

Metodologiyamizning algoritmi quyidagi bosqichlardan iborat:

1. Sistemani $(DI - A)\vec{x} = \vec{f}(t)$ ko'rinishida ifodalash (bunda I — birlik matritsa).





MODERN PROBLEMS IN EDUCATION AND THEIR SCIENTIFIC SOLUTIONS

2. $L(D) = DI - A$ operator matritsasining teskari operatorini Kramer qoidasi yoki matritsaviy algebra yordamida $L^{-1}(D) = \frac{\text{adj}(DI-A)}{\det(DI-A)}$ shaklida aniqlash.

3. Hosil bo'lgan ratsional operatorli kasrlarni oddiy operatorli bo'laklarga yoyish hamda $D^{-1} = \int dt$ ekanligidan foydalanib, integrallash amalini formal ko'paytirishga keltirish.

Asosiy qism:

Boshlang'ich shartlar nolga teng bo'lsin: $x(0) = 0, y(0) = 0$.

Sistemani $D = \frac{d}{dt}$ operatoridan foydalanib quyidagicha yozamiz:

$$\begin{cases} (D-2)x - y = e^{3t} \\ -x + (D-2)y = 0 \end{cases}$$

Ushbu algebraik ko'rinishdagi sistemaning determinantini hisoblaymiz:

$$\Delta(D) = \begin{vmatrix} D-2 & -1 \\ -1 & D-2 \end{vmatrix} = (D-2)^2 - 1 = D^2 - 4D + 3 = (D-1)(D-3)$$

Kramer qoidasiga ko'ra, $x(t)$ va $y(t)$ funksiyalar uchun operatorli yechimlar quyidagicha bo'ladi:

$$\Delta_x(D) = \begin{vmatrix} e^{3t} & -1 \\ 0 & D-2 \end{vmatrix} = (D-2)e^{3t}$$

$$\Delta_y(D) = \begin{vmatrix} D-2 & e^{3t} \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = e^{3t}$$

Bundan yechimlar operator ko'rinishida ajratiladi:

$$x(t) = \frac{D-2}{(D-1)(D-3)} e^{3t}$$

$$y(t) = \frac{1}{(D-1)(D-3)} e^{3t}$$

Natijalar Va Tahlil :

Endi olingan operatorli ifodalarni analitik funksiyaga o'tkazish bosqichini va olingan natijalarni tahlil qilamiz. Algebraik ratsional kasrlarni oddiy kasrlarga yoyamiz.

$y(t)$ uchun operator yoyilmasi:

$$\frac{1}{(D-1)(D-3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{D-3} - \frac{1}{D-1} \right)$$

U holda:

$$y(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{D-3} e^{3t} - \frac{1}{D-1} e^{3t} \right)$$

Mavjud operatorlar hisobi qonuniyatlariga ko'ra, $\frac{1}{D-a} f(t) = e^{at} \int e^{-at} f(t) dt$ amalga oshiriladi. Biroq, tashqi ta'sir e^{3t} bo'lgani sababli, $D \rightarrow 3$ bo'lganda rezonans holati kuzatiladi:





MODERN PROBLEMS IN EDUCATION AND THEIR SCIENTIFIC SOLUTIONS

$$\frac{1}{D-3}e^{3t} = te^{3t}$$

$$\frac{1}{D-1}e^{3t} = \frac{1}{3-1}e^{3t} = \frac{1}{2}e^{3t}$$

Bularni o'rniga qo'yib, $y(t)$ ning aniq analitik yechimini hosil qilamiz:

$$y(t) = \frac{1}{2}te^{3t} - \frac{1}{4}e^{3t}$$

Xuddi shu zaylda $x(t)$ uchun hisoblashni bajaramiz:

$$x(t) = (D-2)y(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}te^{3t} - \frac{1}{4}e^{3t}\right) - 2\left(\frac{1}{2}te^{3t} - \frac{1}{4}e^{3t}\right)$$

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{3}{2}te^{3t} - \frac{3}{4}e^{3t} - te^{3t} + \frac{1}{2}e^{3t} = \frac{1}{2}te^{3t} + \frac{1}{4}e^{3t}$$

Boshlang'ich shartlarni qanoatlantirish uchun umumiy yechimga bir jinsli qism qo'shiladi. Yakuniy aniq analitik yechimlar tizimi:

$$x(t) = \frac{1}{2}te^{3t} + \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{4}e^t \quad y(t) = \frac{1}{2}te^{3t} - \frac{1}{4}e^{3t} + \frac{1}{4}e^t$$

Olingan analitik natijalar operator usulining bir qancha fundamental afzalliklarini ko'rsatadi. Klassik Euler usulida avval bir jinsli sistemaning xarakteristik tenglamasi ildizlari topilib, so'ngra xususiy yechim noma'lum koeffitsiyentlar usuli bilan uzoq vaqt davomida qidirilar edi.

Taklif etilgan uslubning farqli va afzal jihatlari:

1. **To'g'ridan-to'g'ri integrallash:** Rezonans holatlari (kvadratik yoki chiziqli ko'paytuvchilar mos kelganda) operator kasrlarini yoyish jarayonida formal qoidalar asosida avtomatik ravishda hal bo'ladi.

2. **Matritsaviy eksponentani chetlab o'tish:** Ko'p o'lchamli sistemalarda e^{At} matritsani Jordan shakliga keltirish juda katta hisoblash talab qiladi. Operatorlar usulida esa faqat skalyar ko'phadlar ustida amallar bajariladi.

Kamchilik sifatida shuni aytish kerakki, agar A matritsa elementlari vaqtga bog'liq funksiyalar ($A(t)$) bo'lsa, operatorlar kommutativlik xossasini yo'qotadi ($D \cdot A \neq A \cdot D$) va usulni to'g'ridan-to'g'ri qo'llash imkonsiz bo'ladi.

Xulosa:

Tadqiqot natijasida chiziqli o'zgarmas koeffitsiyentli differensial tenglamalar sistemalarini aniq analitik yechishning operatorli sxemasi muvaffaqiyatli ishlab chiqildi. Heaviside tipidagi algebraik operator yondashuvi integral almashtirishlarni bajarmasdan turib, differensial munosabatlarni sof algebraik darajaga o'tkazish imkonini berishi isbotlandi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

1. Salahitdinov, M.S. (2002). *Matematik fizika tenglamalari*. Toshkent: O'zbekiston faylasuflari milliy jamiyati nashriyoti.





MODERN PROBLEMS IN EDUCATION AND THEIR SCIENTIFIC
SOLUTIONS

2. Alimov, Sh.A., Ashurov, R.R. (2005). *Differensial tenglamalar nazariyasidan ma'ruzalar*. Toshkent: Universitet.
3. Tojiyev, Sh.T. (2010). *Oddiy differensial tenglamalar*. Farg'ona: Farg'ona nashriyoti.
4. Jo'rayev, T.J., Safarov, H.S. (2008). *Oliy matematika asoslari*. Toshkent: O'qituvchi.
5. Formanov, Sh.K. (2012). *Matematik tahlil va uning tatbiqlari*. Toshkent: Mumtoz so'z.
6. Sadullayev, A., Mansurov, H. (2006). *Matematik analiz kursidan misol va masalalar to'plami*. Toshkent: O'zbekiston.
7. Shokirova, X.A. (2015). *Differensial tenglamalar sistemalarini yechishning operatorli usullari*. O'zbekiston Matematika Jurnali, (2), 45-52.
8. Bozorov, E.N. (2018). *Matematik modellashda operatorlar usuli*. Toshkent: Fan va texnologiya.
9. Karimov, S.T. (2014). *Tenglamalar sistemasi va chiziqli algebra elementlari*. Farg'ona: Farg'ona davlat universiteti nashriyoti.
10. O'rinov, A.K. (2011). *Chegaraviy masalalar va integral almashtirishlar*. Farg'ona: Fan.
11. Rasulov, M.R. (2009). *Differensial operatorlarning spektral tahlili*. Toshkent: Noshir.
12. Abduhamidov, A.U., Xudoyberganov, G. (2007). *Algebra va matematik analiz asoslari*. Toshkent: O'qituvchi.
13. Ismoilov, Sh.I. (2019). *Amaliy matematika va operatorli hisob*. Samarqand: SamDU nashriyoti.
14. Heaviside, O. (1922). *Electromagnetic Theory*. London: Benn Brothers.
15. Coddington, E. A., & Levinson, N. (1955). *Theory of Ordinary Differential Equations*. New York: McGraw-Hill.
16. Schiff, J. L. (1999). *The Laplace Transform: Theory and Applications*. New York: Springer.
17. Boyco, W. E., & DiPrima, R. C. (2012). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Hoboken: John Wiley & Sons.
18. Wolfram MathWorld. (2026). *Operator Methods for Differential Equations*. Kirish manzili: <https://mathworld.wolfram.com/DifferentialOperator.html>
19. MIT OpenCourseWare. (2025). *Differential Equations: Differential Operators*. Kirish manzili: <https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/>
20. Elib.uz — O'zbekiston elektron ilmiy kutubxonasi. (2026). *Matematika bo'yicha ilmiy maqolalar bazasi*. Kirish manzili: <http://elib.uz/uz/category/mathematics>

