CHIZIQLI GIPERBOLIK TENGLAMA UCHUN TESKARI MASALA

Bahriddinova Nozanin Janobidin-zoda
Farg'ona davlat universiteti amaliy matematika yo'nalishi talabalari
E-mail: nozanin122003@gmail.com
Shovkatjonov Komiljon Qaxramonjon o'g'li
E-mail: shavkatjonovkomiljon0506@gmail.com

Annotatsiya. *Mazkur maqolada har ikki uchidan mahkamlangan elastik torning chiziqli giperbolik tenglama orqali tavsiflanadigan tebranish jarayoni uchun teskari masala o'rganiladi. Torning boshlang'ich holatini aniqlovchi noma'lum funksiya ma'lum vaqt momentidagi torning holatiga asoslanib aniqlanadi. Bu orqali chiziqli operatorli tenglama shakllantiriladi va uning korrektlik shartlari tahlil qilinadi. Operatorning xossalari orqali masalaning yechimi mavjudligi, yagonaligi va turg'unligi holatlari tekshiriladi. Ayrim kuzatish nuqtalarida masala korrekt bo'lsa -da, ularga yaqin nuqtalarda nokorrektlik holatlari yuzaga kelishi mumkinligi matematik jihatdan asoslab beriladi. Bundan tashqari, boshlang'ich tezlik ma'lum bo'lib, boshlang'ich holat noma'lum bo'lgan teskari masala ham ko'rib chiqiladi va uning ham nokorrektligi isbotlanadi.*

Kalit so'zlar: *Chiziqli giperbolik tenglama, teskari masala, elastik tor, korrektlik, operator tenglama, tebranish jarayoni, Furye qatori, turg'unlik, Parseval tengligi.*

Abstract. *This article studies the inverse problem describing the vibration process of an elastic string fixed at both ends, modeled by a linear hyperbolic equation. The unknown initial displacement function of the string is determined based on the given position distribution at a certain time. A linear operator equation is formulated, and the conditions for the well-posedness of the problem are investigated. The properties of the operator ensuring existence, uniqueness, and stability of the solution are analyzed. It is shown that the problem is well-posed at specific observation points but may become ill-posed near them. Additionally, an inverse problem with known initial velocity distribution and unknown initial displacement is examined, which is also ill-posed.*

Keywords: *Linear hyperbolic equation, inverse problem, elastic string, well-posedness, operator equation, vibration process, Fourier series, stability, Parseval's identity.*

Аннотация. *В статье рассматривается обратная задача, описывающая процесс колебаний упругой струны, закрепленной с двух концов, на основе линейного гиперболического уравнения. Определяется неизвестная функция начального состояния струны по заданному распределению её положения в* *заданный момент времени. Формируется линейное операторное уравнение, исследуются условия корректности задачи. Анализируются свойства оператора, обеспечивающие существование, единственность и устойчивость решения. Показано, что задача корректна в определённых точках наблюдения, но может становиться некорректной при приближении к ним. Кроме того, рассматривается обратная задача с известным начальным распределением скорости и неизвестным начальным положением, которая также является некорректной.*

Ключевые слова: *Линейное гиперболическое уравнение, обратная задача, упругая струна, корректность, операторное уравнение, процесс колебаний, Ряд Фурье, устойчивость, тождество Парсеваля.*

Kirish

Matematik fizika tenglamalari yordamida real fizik jarayonlarni modellashtirish zamonaviy ilm-fan va texnika taraqqiyotining ajralmas boʻlagiga aylangan. Ayniqsa, elastik muhitlar tebranishi, issiqlik uzatish va boshqa shunga oʻxshash jarayonlar giperbolik, elliptik yoki parabolik turdagi tenglamalar bilan ifodalanadi. Koʻpgina hollarda bu tenglamalar uchun toʻgʻri (pryamoy) masala emas, balki fizik tajriba yoki kuzatish natijalariga asoslanib boshlangʻich yoki chegaraviy shartlarni aniqlashga qaratilgan teskari masalalar (Rückwärtsaufgabe) dolzarb ahamiyat kasb etadi. Teskari masalalar koʻpincha nokorrekt, ya’ni ularning yechimi mavjud boʻlmasligi, yagona boʻlmasligi yoki uzluksiz bogʻliqlikka ega boʻlmasligi bilan xarakterlanadi. Shu sababli, teskari masalalarni oʻrganish va ularning korrektlik shartlarini aniqlash matematik analiz va funksional analiz sohalarining muhim yoʻnalishlaridan biri hisoblanadi. Mazkur maqolada chiziqli giperbolik tenglama yordamida har ikki uchidan mahkamlangan elastik torning tebranishi tavsiflanadi va unga tegishli teskari masalalar tahlil qilinadi. Jumladan, torning ma’lum vaqt momentidagi holatiga asoslanib boshlangʻich holatini yoki boshlangʻich tezlik taqsimotini aniqlash masalalari koʻrib chiqiladi. Bu orqali chiziqli operator tenglamalar quriladi, ularning korrektligi, yagonaligi va turgʻunligi shartlari aniqlanadi. Tadqiqot davomida operatorning parametrga bogʻliq xatti-harakatlari, kuzatish nuqtalariga nisbatan sezuvchanligi va bu holatlarning fizik va matematik mohiyati chuqur oʻrganiladi.

Chiziqli giperbolik tenglama uchun teskari masala

Har ikki uchidan mahkamlangan elastik torning tebranish jarayonini tavsiflovchi

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, 0 < x < l, 0 < t \le T, \qquad (1)$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, 0 \le t \le T, \qquad (2)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), 0 \le x \le l, \qquad (3)$$

$$u_t(x,T) = \psi(x), 0 \le x \le l, \qquad (4)$$

tebranish tenglama uchun birinchi chegaraviy masalani ko‘rib chiqamiz. $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalari mos ravishda torning boshlang‘ich holatini va boshlang‘ich tezlik taqsimotini aniqlaydi.

(1)-(4) masala yechimini o‘zgaruvchilarni ajratish usuli bilan olish mumkin va u

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{l}\int_0^1\varphi(x)\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi k}{l}xdx\right)\cos\frac{a\pi k}{l}t+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{2}{l}\int_0^1\psi(x)\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi k}{l}xdx\right)\sin\frac{a\pi k}{l}t\right]\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi k}{l}x \quad (5)$$

ko‘rinishga ega.

Keyingi teskari masalani qaraymiz. Faraz qilamiz, torning boshlang‘ich tezlik taqsimoti $\psi(x)=0$, boshlang‘ich holatini aniqlovchi $\varphi(x)$ funksiyasi noma’lum.

Agar $t_0\in(0,T]$ vaqtdagi torning o‘rni

$$u(x,t)=X(x)\times T(t) \quad (6)$$

$$T''X(x)=a^2X''(x)\times T(t)$$

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

$$\begin{cases}T''(t)+\lambda a^2T(t)=0\\ X''(x)+\lambda X(x)=0\end{cases}$$

$$\lambda>0 \quad da \quad X''(x)+\lambda X(x)=0$$

$$k^2+\lambda=0 \quad k^2=-\lambda \quad k=\pm\sqrt{\lambda}i$$

$$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x$$

berilgan bo‘lsa, $\varphi(x)$ funksiyani aniqlash talab qilinadi, bu yerda g(x)-berilgan funksiya. (5) formulaga $\psi(x)=0$ va $t=t_0$ qiymatlarni qo‘yib, $\varphi(x)$ funksiyaga nisbatan

$$X(x)=-\sqrt{\lambda}C_1\sin\sqrt{\lambda}x+\sqrt{\lambda}C_2\cos\sqrt{\lambda}x \quad (7)$$

$$X(0)=0 \quad X(l)=0$$

$$X(0)=C_1+0=0 \quad C_1=0$$

$$X(l)=C_2\sin\sqrt{\lambda}l=0$$

$$\sqrt{\lambda}l=\pi k \quad \lambda_k=\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2\to xos \quad son$$

$$X(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi k}{l}x\to xos \quad funksiya$$

$$T''(t)+a^2\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2T(t)=0$$

$$k^2+\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2=0$$

$$k=\pm\frac{a\pi k}{l}$$

tenglamani hosil qilamiz.

Bu tenglama $\varphi(x)$ funksiyaga nisbatan chiziqli tenglama bo‘lib, $A_{t_0}\varphi=g$ ko‘rinishda, bu yerda A_{t_0} chiziqli operator, (7) tenglamaning chap tomonidagi ifoda bilan aniqlanadi. A_{t_0} operatori $L_2[0,l]$ fazodan $L_2[0,l]$ fazoga akslantiruvchi deb hisoblansa, bu tenglamani yechish masalasining korrektligini ko‘rib chiqamiz.

O‘rganilayotgan masalaning korrektligi t_0 kuzatish momentini tanlashga muhim darajada bog‘liqligini ko‘rsatamiz. $t_0=\frac{2l}{a}$ bo‘lsin, u holda (7) dan

$$T(t)=a_k\cos\frac{a\pi k}{l}t+b_k\sin\frac{a\pi k}{l}t \qquad (8)$$

tenglikni olamiz.

(8) tenglikning chap tomonidagi ifoda $\varphi(x)$ funksiyaning $\left\{\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\right\}$ funksiyalar sistemasida Furye qatoriga yoyilmasi bo‘lgani uchun (8) tenglikni quyidagicha qayta yozish mumkin: $\varphi(x)=g(x)$, ya’ni, $t_0=\frac{2l}{a}$ qiymatda A_{t_0} operator birlikka teng va aniqki, bu holda (7) tenglamani yechish masalasi korrekt bo‘ladi. Bu xulosa fizik nuqtai nazardan ham tushunarli. Tor tebranish jarayoni davriy bo‘lib, $t_0=\frac{2l}{a}$ vaqt bo‘lgandan so‘ng tor vaqtning boshlang‘ich momentida egallagan pozitsiyasini egallaydi. $t_0=\frac{2l}{a}$ qiymati masala korrekt bo‘ladigan yagona qiymatmi (tebranish davrini hisobga olmaganda).

1-teorema. Agar $t_0=\frac{2pl}{(2k-1)a}$, bu yerda p va k natural sonlar, har qanday $t_0=\frac{2pl}{(2k-1)a}$ uchun (7) tenglamaning yagona yechimi $\varphi(\zeta)\notin L_2[0,l]$ bo‘ladi va

$$\|\varphi\|_{L_2[0,l]}\le C\|g\|_{L_2[0,l]},C=const. \qquad (9)$$

turg‘unlik bahosi bajariladi.

Isbot. n natural argumentli $\cos\frac{\pi n a t_0}{l}=\cos\frac{2\pi np}{2k-1}$ funksiyani qaraymiz. $n_2=n_1+2k-1$ uchun $\cos\frac{\pi n_2 a t_0}{l}=\cos\frac{2\pi n_1 p}{2k-1}$ tengligi bajarilganligi sababli $\cos\frac{2\pi np}{2k-1}$ funksiya 2k-1 dan ortiq bo‘lmagan turli qiymatlarni qabul qiladi. n=1,2,…,2k-1 uchun funksiya

$\cos\frac{2\pi np}{2k-1}\neq 0$ ekanligini ko'rsatamiz. Haqiqatdan ham, ba'zi $n=n_0$ uchun $\cos\frac{2\pi n_0 p}{2k-1}\neq 0$ deylik. U holda $\cos\frac{2\pi n_0 p}{2k-1}=\frac{\pi}{2}+\pi q$, bu yerda q-butun son. Demak, $4n_0 p=(2q+1)(2k-1)$ tenglik bajarilishi kerak. Ammo bu tenglik mumkin emas, chunki uning chap tomonida juft son, o'ng tomonida esa toq son mavjud. Shunday qilib, $\cos\frac{2\pi np}{2k-1}$ n ning natural qiymatlari uchun nolga teng bo'laolmaydi va cheklangan miqdordagi qiymatlarni oladi. Demak,

$$\min_{n>1}\left|\cos\frac{2\pi np}{2k-1}\right|=c_1>0 \qquad (10)$$

(7) tenglikka $t_0=\frac{2pl}{(2k-1)a}$ qiymatni qo'yamiz, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\zeta)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\zeta\right)d\zeta\cos\frac{2\pi np}{2k-1}\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)=g(x). \qquad (11)$$

φ_N va g_n orqali Furye koeffitsiyentlarni belgilaymiz.

$$\varphi_N=\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l\varphi(\zeta)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\zeta\right)d\zeta, \quad g_n=\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l g(\zeta)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\zeta\right)d\zeta.$$

$\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi n}{l}\zeta\right)$ funksiyalar sistemasi $L_2[0,l]$ fazoda to'la ortonormal sistema bo'lgani uchun, (11) dan

$$\varphi_n\cos\frac{2\pi np}{2k-1}=g_n, n=1,2,...$$

kelib chiqadi. (10) tengsizlikni hisobga olib, har qanday $g_x\in L_2[0,l]$ funksiya uchun (11) tenglama

$$\varphi(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}g_n\left(\cos\frac{2\pi np}{2k-1}\right)^{1}\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$$

formula bilan aniqlangan $\varphi_x\in L_2[0,l]$ yagona yechimga ega ekanligini topamiz. Bu formuladan, (10) tengsizlik va Parseval tengligidan, o'zgarmas $C=\frac{1}{c_1}$ bilan turg'unlik bahosi (9) kelib chiqadi va 1-teorema isbotlanadi. 1-teoremadan kelib chiqadiki, $t_0=\frac{2pl}{(2k-1)a}$ bo'lganda (7) tenglamani yechish masalasi korrektdir, bu yerda , p,k– ixtiyoriy natural sonlar. Endi, bu masala nokorrekt bo'ladigan t_0 qiymatlarining cheksiz to'plami mavjudligini ko'rsatamiz. Faraz qilamiz, $t_0=\frac{(2p-1)l}{2k}$ bunda , p,k– natural sonlar. Bu holda $\cos\frac{\pi nat_0}{l}=\cos\frac{\pi n(2p-1)}{2k}$ va n=k bo'lganda $\cos\frac{\pi nat_0}{l}$. U holda o'ng tomoni g(x) nol bo‘lganda (7) tenglamaning yechimi $\varphi(\zeta)=\sin\frac{\pi k}{l}$ funksiya bo‘ladi. Bundan, (7) tenglamaning yechimi yagona emas va masala nokorrektdir.

Ko‘rib chiqilayotgan teskari masalaning korrektligi yuqoridagi tahlil bilan bog‘liq holda, quyidagi savol tug‘iladi: ba’zi kuzatish nuqtalari t_0 uchun masala korrekt, lekin ularga shunchalik yaqin bo‘lgan nuqtalarda nokorrekt ekanligini qanday tushuntirish mumkin?

Faraz qilamiz, $t_0=\frac{2l}{a}$. U holda (7) tenglikning chap tarafidagi ifoda bilan aniqlangan At_0 operator, $L_2[0,l]$ fazodan $L_2[0,l]$ fazoga akslantiruvchi sifatida qaralganda, birlik operatoga teng va $At_0\varphi=g$ tenglamani yechish masalasi korrektdir. Kuzatish nuqtalari ketma-ketligini $t_{0k}\frac{(4k-1)l}{2ka}$ olib, $k\to\infty$ da $t_{0k}\to t_0$ ekanligini olamiz. Lekin barcha natural k uchun $At_{0k}\varphi=g$ tenglamani yechish masalasi nokorrekt. Bir qarashda tushinarsiz bo‘lgan bu haqiqat $\left\|A_{t_{0k}}-A_{t_0}\right\|t_{0k}\to t_0$ da nolga intilmasligi bilan izohlanadi. Haqiqatdan ham,

$$\left\|A_{t_{0k}}-A_{t_0}\right\|=\sup_{\|\varphi\|_{L_2[0,l]}\le 1}\left\|(A_{t_{0k}}-E)\varphi\right\|_{L_2[0,l]}=\sup_{\|\varphi\|_{L_2[0,l]}\le 1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n^2\left(\cos\frac{\pi(4k-1)n}{2k}\right)^2\right)^{1/2}.$$

Shunday ekan, istalgan natural n=k son uchun $\cos\frac{\pi(4k-1)n}{2k}=0$, bundan barcha natural k uchun $\left\|A_{t_{0k}}-A_{t_0}\right\|\ge 1$ bo‘ladi.

Shunday qilib, bir biriga yaqin t_0 kuzatish nuqtalari uchun $At_{0k}\varphi=g$ operator tenglamasining turli xil (korrektlik nuqtai nazaridan) xossalari At_0 operatorlar oilasining t_0 parametriga nisbatan uzluksiz emasligi bilan izohlanadi.

Endi, (1)-(4) chegaraviy masala uchun boshqa yana bitta teskari masalani qaraymiz. Faraz qilamiz, $\varphi(x)$ funksiya ma’lum va (6) ko‘rinishdagi (1)-(4) masala yechimi haqida qo‘shimcha ma’lumot ham berilgan, $\psi(x)$ funksiyani aniqlash zarur. Yozuvlarni soddalashtirish uchun berilgan funksiya $\varphi(x)=0$ deb faraz qilamiz. (5) ga $t=t_0$ qiymatni qo‘yamiz, $\psi(x)$ noma’lum funksiya uchun

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi na}\int_0^l\psi(\zeta)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\zeta\right)d\zeta\sin\left(\frac{\pi n}{l}at_0\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)=g(x),0\le x\le l. \qquad (12)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamani $g_x\in L_2[0,l]$ va $\psi(x)$ yechimi ham $L_2[0,l]$ fazodan izlagan holatda yechish masalasi har qanday $t_0>0$ uchun nokorrekt bo‘ladi.

Darhaqiqat, $L_2[0,l]$ fazodagi (12) tenglama yechimining yagonaligi t_0 qiymatiga bog‘liq. Agar shunday t_0 qiymatida barcha n≥1 uchun $\sin\left(\frac{\pi n}{t}at_0\right)\ne 0$ bo‘lsa, masalan

$t_0 = \frac{l}{\pi a}$, u holda (12) 132 tenglamaning yechimi yagona bo‘ladi. Agar t_0 ning shunday qiymatida $\sin\left(\frac{\pi n}{t} a t_0\right) = 0$ bo‘ladigan n mavjud bo‘lsa, masalan, $t_0 = \frac{l}{2a}$ bo‘lsa, (12) tenglamaning yechimi yagona emas. Biroq, barcha $t_0 > 0$ uchun (12) tenglamaning yechimi ixtiyoriy $g_x \in L_2[0,l]$ uchun mavjud emas. Haqiqatdan, agar $g_x \in L_2[0,l]$ uchun (12) tenglama $\psi_x \in L_2[0,l]$ yechimga ega bo‘lsin, u holda

$$\|\psi\|^2_{L_2[0,l]} = \sum_{n=1}^{\infty} g_n^2 \left(\sin\frac{\pi n a t_0}{l}\right)^{-2} \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2.$$

Yechimning ushbu tasviridan kelib chiqadiki, har qanday $t_0 > 0$ da (12) tenglama yechimi mavjud emas, masalan,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{\pi n x}{l}$$

bo‘lganda.

Shunday qilib, (12) tenglamani yechish masalasi yoki u bilan bir xil bo‘lgan $B_{t_0}\psi = g$ chiziqli operator tenglamasi, bu yerda B_{t_0} (12) ning chap tomonidagi ifoda bilan aniqlangan, va $L_2[0,l]$ fazodan $L_2[0,l]$ fazoga harakat qiluvchi operator, har qanday $t_0 > 0$ uchun nokorrekt hisoblanadi.

$$\begin{cases} a_k = \int_0^l \varphi(x) \times \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{\pi k}{l} x dx \\ b_k = \dfrac{l}{a\pi k \cos\frac{a\pi k T}{l}} \left(\int_0^l \psi(x) \times \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{\pi k}{l} x dx + a_k \frac{a\pi k}{l} \sin\frac{\pi k T}{l} \right) \end{cases}$$

$$u(x,t) = X(x) \times T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[a_k \cos\frac{a\pi k}{l} t + b_k \sin\frac{a\pi k}{l} t \right] \times \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{\pi k}{l} x =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \Bigg[\left(\int_0^l \varphi(x) \times \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{\pi k}{l} x dx\right) \times \cos\frac{a\pi k}{l} t + \frac{l}{a\pi k \cos\frac{a\pi k T}{l}} \Bigg(\int_0^l \psi(x) \times \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{\pi k}{l} x dx +$$

$$+ \left(\int_0^l \varphi(x) \times \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{\pi k}{l} x dx\right) \times \frac{a\pi k}{l} \sin\frac{\pi k T}{l} \Bigg) \times \sin\frac{a\pi k}{l} t \Bigg] \times \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{\pi k}{l} x$$

XULOSA: O‘rganilgan teskari masalada torning tebranish jarayonidan kelib chiqqan holda, boshlang‘ich holat yoki tezlikni aniqlashga qaratilgan tenglamaning chiziqli operatorli shakli o‘rganildi. Tadqiqot natijasida ushbu operator tenglamaning korrektligi ko‘p jihatdan kuzatish nuqtasining tanlanishiga bog‘liqligi aniqlandi. Ayrim aniq vaqt momentlarida yechimning mavjudligi va yagonaligi kafolatlanadi, biroq shu nuqtalarga yaqin bo‘lgan boshqa vaqt momentlarida esa masala nokorrekt bo‘lib qoladi. Bu esa operator funksiyasining parametrga nisbatan uzluksiz emasligi bilan izohlanadi. Shuningdek, boshqa bir teskari masalada boshlang‘ich tezlik berilgan, boshlang‘ich holat noma’lum holat ko‘rib chiqilib, bu holatda ham tenglamaning har qanday vaqt momenti uchun nokorrektligi isbotlandi. Bu holatlar teskari masalalarning murakkab va noaniq yechim xususiyatlariga ega ekanligini ko‘rsatadi.

Bu maqola mustaqil ta’lim uchun tayyorlandi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Lavrent’ev M.M., Romanov V.G., Shishatskiy S.P. Teskari masalalar nazariyasiga kirish. – M.: Nauka, 1975.

2. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. Nokorrekt masalalar. – M.: Nauka, 1979.

3. Morozov V.A. Teskari va ill-posed masalalarning matematik asoslari. – Novosibirsk: Nauka, 1984.

4. Ibragimov I.A. Giperbolik tenglamalar va ularning teskari masalalari. – Toshkent: Fan, 2002.

5. Islomov M. Matematik fizika tenglamalari. – Toshkent: O‘qituvchi, 1997.