CHIZIQLI DASTURLASH MASALALARIDA BUTUN SONLI YECHIMLARNI TOPISHDA KESUVCHI TENGLAMALAR USULINING QO‘LLANILISHI

Mamatova Zilolaxon Xabibulloxonovna
Farg‘ona davlat universiteti dotsent, pedagogika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) Orcid: 0009-0009-9247-3510
E-mail: mamatova.zilolakhon@gmail.com
Abdug’aforov Dilyorbek Dilshodjon zoda
Farg‘ona Davlat Universiteti Amaliy matematika yo‘nalishi 3-kurs talabasi
Orcid: 0009-0007-2562-5073
E-mail: abdugaforov.bk.ru

Annotatsiya: *Ushbu maqola chiziqli dasturlash masalalarining butun sonli yechimlarini topishda kesuvchi tenglamalar usulidan foydalanishni ko‘rib chiqadi. Maqolada simpleks usuli yordamida optimal yechim topilgandan so‘ng, agar yechim kasr sonlarni o‘z ichiga olsa, kesuvchi tenglamalar tuzish va ularni simpleks jadvalga qo‘shish jarayoni batafsil yoritilgan. Kesuvchi tenglamalar kasr qismlarni hisobga olgan holda tuziladi va qo‘shimcha o‘zgaruvchilar kiritish orqali butun sonli yechimga yaqinlashiladi. Jarayon butun sonli yechim topilguncha yoki masalaning yechimi mavjud emasligi aniqlanguncha takrorlanadi. Misol sifatida berilgan chiziqli dasturlash masalasining bosqichma-bosqich yechimi keltirilib, kesuvchi tenglamalar tuzish, simpleks almashtirishlar va yakuniy butun sonli yechimni aniqlash ko‘rsatilgan. Natijada, masalaning optimal butun sonli yechimi X=(1,0,4,1) va minimal maqsad funksiyasi qiymati Zmin=5 sifatida topilgan. Maqola butun sonli dasturlash masalalarini yechishda kesuvchi tenglamalar usulining amaliy qo‘llanilishini tushunish uchun foydali manba hisoblanadi.*

Kalit so‘zlar: *Butun sonli dasturlash, kesuvchi tenglamalar, simpleks usuli, chiziqli dasturlash, optimal yechim, kasr qismlar, simpleks jadval, qo‘shimcha o‘zgaruvchi, maqsad funksiyasi, butun sonli yechim.*

Kirish. Chiziqli dasturlash masalalari ko‘plab ilmiy va amaliy sohalarda optimal yechimlarni topish uchun keng qo‘llaniladi. Biroq, ba’zi hollarda yechimlarning butun sonli bo‘lishi talab etiladi, bu esa butun sonli dasturlash masalalarini shakllantiradi. Simpleks usuli chiziqli dasturlash masalalarini yechishda samarali bo‘lsa-da, u har doim butun sonli yechimlarni kafolatlamaydi. Bunday hollarda, kesuvchi tenglamalar usuli yordamida kasr sonli yechimlarni butun sonli yechimlarga aylantirish mumkin. Ushbu maqola kesuvchi tenglamalar usulining asosiy tamoyillari va uni amalda qo‘llash jarayonini ko‘rib chiqadi. Maqolada usulning bosqichlari aniq misol asosida tahlil qilinib, simpleks jadvalda kesuvchi tenglamalarni tuzish va iterativ tarzda butun sonli yechimga erishish jarayoni yoritiladi. Bu jarayon nafaqat nazariy jihatdan muhim, balki resurslarni taqsimlash, ishlab chiqarishni rejalashtirish va logistikada qaror qabul qilish kabi amaliy muammolarni hal qilishda ham katta ahamiyatga ega.

Adabiyotlar tahlili

Butun sonli dasturlash va kesuvchi tenglamalar usuli sohasidagi tadqiqotlar chiziqli dasturlashning muhim yo‘nalishlaridan biridir. Ushbu sohada ko‘plab olimlar va tadqiqotchilarning ishlari mavjud bo‘lib, ularning aksariyati simpleks usulini butun sonli yechimlarga moslashtirishga qaratilgan.Gomory (1958) o‘zining fundamental ishida kesuvchi tenglamalar usulini birinchi marta taklif qilib, kasr sonli yechimlarni butun sonli yechimlarga aylantirish uchun matematik asos yaratdi. Uning usuli simpleks jadvalning tenglamalarida kasr qismlarni ajratib, yangi tengsizliklar tuzishga asoslanadi. Bu usul keyinchalik ko‘plab tadqiqotlarda rivojlantirildi va turli amaliy masalalarga moslashtirildi.Dantzig (1963) va uning hamkorlari tomonidan chiziqli dasturlashning umumiy nazariyasi va simpleks usuli batafsil ishlab chiqilgan bo‘lib, bu ishlar butun sonli dasturlash masalalarini yechishda asosiy manba sifatida xizmat qiladi. Ularning tadqiqotlari kesuvchi tenglamalar usulini amalda qo‘llashda muhim yo‘l ochdi.Keyingi yillarda, Land va Doig (1960) tomonidan taklif qilingan shoxlanish va chegaralash (Branch and Bound) usuli butun sonli dasturlash masalalarini yechishda muqobil yondashuv sifatida keng tarqaldi. Biroq, kesuvchi tenglamalar usuli o‘zining aniqligi va simpleks jadvalga integratsiyalashuvi tufayli ko‘plab hollarda afzal ko‘riladi.Zamonaviy tadqiqotlarda, masalan, Wolsey (1998) va Nemhauser va Wolsey (1988) ishlarida, kesuvchi tenglamalar usulining samaradorligini oshirish uchun yangi algoritmlar va optimallashtirish strategiyalari taklif qilingan. Ularning ishlari, ayniqsa, katta hajmdagi masalalarni yechishda va kombinator optimallashtirish muammolarida kesuvchi tenglamalarni qo‘llashni kengaytirdi.Mahalliy olimlar orasida, masalan, O‘zbekistonda optimallashtirish masalalari bo‘yicha tadqiqotlar olib borilmoqda. Xususan, matematik modellashtirish va dasturlash sohasida ishlaydigan tadqiqotchilar (masalan, Tursunov va boshqalar, 2010) kesuvchi tenglamalar usulini iqtisodiy va logistika masalalariga qo‘llash bo‘yicha ishlar chop etgan. Biroq, ushbu sohada mahalliy adabiyotlar hali ham cheklangan bo‘lib, ko‘proq xalqaro tajribaga tayanish talab etiladi.Umuman olganda, adabiyotlar tahlili shuni ko‘rsatadiki, kesuvchi tenglamalar usuli butun sonli dasturlash masalalarini yechishda muhim o‘rin tutadi, lekin uning samaradorligini oshirish va katta hajmdagi masalalarga moslashtirish bo‘yicha tadqiqotlar davom etmoqda. Ushbu maqola Gomory usuliga asoslanib, uni amaliy misol orqali tahlil qilishga qaratilgan bo‘lib, mavjud adabiyotlarni to‘ldiruvchi amaliy yondashuvni taklif etadi.

Tadqiqot metodologiyasi

Ushbu tadqiqot butun sonli chiziqli dasturlash masalalarini yechishda kesuvchi tenglamalar usulining qo‘llanilishini o‘rganishga qaratilgan bo‘lib, metodologiya nazariy tahlil va amaliy misolga asoslanadi. Tadqiqot quyidagi asosiy bosqichlardan iborat:Nazariy asoslarni o‘rganish: Kesuvchi tenglamalar usulining matematik asoslari va simpleks usuli bilan integratsiyasi tahlil qilinadi. Gomory (1958) tomonidan ishlab chiqilgan usulning asosiy tamoyillari, ya’ni kasr qismlarni ajratish, yangi tengsizliklar tuzish va qo‘shimcha o‘zgaruvchilarni kiritish jarayonlari batafsil ko‘rib chiqiladi. Shu bilan birga, usulning cheklovlari va qo‘llanilishi adabiyotlar tahlili asosida aniqlanadi.Matematik modellashtirish: Tadqiqotda chiziqli dasturlash masalasining butun sonli yechimini topish jarayoni misol orqali ko‘rsatiladi. Masala avval normal shaklga keltiriladi va simpleks usuli yordamida dastlabki optimal yechim topiladi. Agar yechim kasr sonlarni o‘z ichiga olsa, kesuvchi tenglamalar tuzish jarayoni boshlanadi.Simpleks almashtirishlar: Tuzilgan kesuvchi tenglama simpleks jadvalning yangi qatoriga joylashtiriladi va simpleks usulining standart qadamlariga muvofiq almashtirishlar amalga oshiriladi. Har bir iteratsiyada ozod hadlar ustunidagi qiymatlar tekshiriladi. Agar barcha qiymatlar butun sonli bo‘lsa, yechim optimal deb qabul qilinadi. Aks holda, jarayon takrorlanadi.Amaliy misol: Tadqiqotda berilgan chiziqli dasturlash masalasining butun sonli yechimini topish jarayoni bosqichma-bosqich ko‘rsatiladi. Har bir qadam, ya’ni simpleks jadvalning tuzilishi, kesuvchi tenglamalarning qo‘shilishi va yangi jadvalning hisoblanishi aniq raqamlar bilan tasvirlanadi. Bu jarayon usulning amaliy qo‘llanilishini va aniqligini namoyish etadi.Natijalarni tahlil qilish: Hosil bo‘lgan yechimlarning to‘g‘riligi va optimal yechimga erishish uchun talab qilingan iteratsiyalar soni tahlil qilinadi. Agar masalaning butun sonli yechimi mavjud bo‘lmasa, bu holatni aniqlash jarayoni ham ko‘rib chiqiladi.Tadqiqot metodologiyasi sifatida matematik modellashtirish va algoritmik yondashuvlardan foydalaniladi. Usulning samaradorligini sinash uchun kichik hajmdagi misol tanlangan bo‘lib, bu usulning tushunarli va qo‘llanilishi oson ekanligini ko‘rsatadi. Tadqiqot jarayonida hisoblashlar qo‘lda amalga oshirilgan bo‘lsa-da, katta hajmdagi masalalar uchun maxsus dasturiy ta’minotlardan foydalanish imkoniyati ham muhokama qilinadi. Ushbu metodologiya kesuvchi tenglamalar usulining nazariy va amaliy ahamiyatini ochib berishga xizmat qiladi.

Taxlil va natijalar

Butun sonli dasturlash va uni yechish usuli

O‘zgaruvchilarga butun sonli bo‘lishlik sharti qo‘yilgan chiziqli dasturlash masalalariga butun sonli dasturlash masalasi deyiladi. Butun sonli dasturlash masalalariga sayyoh haqidagi masala, optimal jadval tuzish, transport vositalarini marshrutlashni optimallash, optimal joylashtirish masalasi va hokazolarni misol qilish mumkin.

Butun sonli dasturlash masalasi chiziqli dasturlash masalasidan qo‘shimcha shartlar bilan farq qiladi. Bu shartlarning qatnashishi butun sonli dasturlash masalasini yechish jarayonini qiyinlashtiradi. Natijada chiziqli dasturlash masalalarini yechish uchun qo‘llaniladigan usullarni butun sonli dasturlash masalalariga qo‘llash mumkin bo‘lmay qoladi.

Gomori usuli. Butun sonli dasturlash masalalarini yechish uchun uning xususiyatlarini e'tiborga oluvchi usullar yaratilgan bo‘lib, ulardan amerikalik olim R.Gomori yaratgan usul optimal yechimni beruvchi eng aniq usul hisoblanadi. Bu usulning g‘oyasi quyidagidan iborat. Berilgan butun sonli dasturlash masalasida noma'lumlarning butun bo‘lishlik shartiga e'tibor bermasdan, ularni oddiy chiziqli dasturlash masalasi sifatida simpleks usuldan foydalanib yechamiz.

Agar yechim butun sonlardan iborat bo‘lsa, u butun sonli dasturlash masalasining ham yechimi bo‘ladi. Aks holda noma'lumlarning butun bo‘lishlik shartini e'tiborga oluvchi va "kesuvchi tenglama" deb ataluvchi qo‘shimcha tenglama tuziladi.

1.Aytaylik, masaladagi sonlarning butun bo‘lishlik sharti tashlab yuborishdan hosil bo‘ladigan masala yechilgan va uning optimal yechimi mavjud bo‘lsin. Agar barcha x lar butun sonlar bo‘lsa, topilgan yechim butun sonli dasturlash masalaning yechimi bo‘ladi.

2.Faraz qilaylik, ba'zi x lar kasr sonlardan iborat bo‘lsin, ya'ni simpleks jadvaldagi ozod hadlar ustuni qiymatlari ichida kasr sonlar ham mavjud bo‘lsin. Ularning butun kismlarini [x] bilan belgilaymiz. U holda bu sonlarning kasr qismlari q lar quyidagicha aniqlanadi:

$q_i=x_i-[x_i]$, $q_{ij}=a_{ij}-[a_{ij}]$.

Faraz qilaylik, ba'zi $q_i \neq 0$ bo‘lsin. U holda, simpleks jadvalning $\max\limits_{q_i \neq 0} q_i = q_k$ tenglikni qanoatlantiruvchi k qatori uchun kesuvchi tenglama tuziladi. Buning uchun avval

$q_{k1}x_1+ q_{k2}x_2+ \ldots + q_{kn}x_n \geq q_k$

tengsizlik tuziladi, so‘ngra uni (-1) ga ko‘paytirib, x_{n+1} qo‘shimcha o‘zgaruvchi kiritiladi.

$-q_{k1}x_1- q_{k2}x_2- \ldots - q_{kn}x_n + x_{n+1}=q_k$.

Bunday tuzilgan tenglama kesuvchi tenglama deyiladi.

3.Kesuvchi tenglamani simpleks jadvalning m+2 qatoriga joylashtiramiz va simpleks almashtirishlarni bajaramiz.

Agar hosil bo‘lgan yangi simpleks jadvalda barcha x_i lar butun sonli (ya'ni hamma $q_i=x_i-[x_i]=0$) bo‘lsa, topilgan yechim berilgan butun sonli dasturlash masalasining yechimi bo‘ladi. Aks holda yuqoridagi 2 va 3 punktlar yana takrorlanadi. Umuman bu jarayon masalaning butun sonli yechimi topulguncha yoki masalaning butun sonli yechimi mavjud emasligi aniqlanguncha takrorlanadi.

Misol. quyidagi chiziqli dasturlash masalasining butun sonli yechimini toping.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 3 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\quad butun$$

$$Z = 8 - 3x_1 - x_2 \to \min$$

Masalani normal holga keltiramiz:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\quad butun$$

$$Z = 8 - 3x_1 - x_2 \rightarrow \min$$

Masalani simpleks usulda yechamiz.

1.

BO‘	1	$-x_1$	$-x_2$
x_3	6	2	3
x_4	3	2	-3
Z	8	3	1

2.

BO‘	1	$-x_4$	$-x_2$
x_3	3	-1	6
x_1	1.5	0.5	-1.5
Z	3.5	-1.5	5.5

BO‘	1	$-x_4$	$-x_3$
x_2	0.5	-0.17	0.17
x_1	2.25	0.25	0.25
Z	0.75	-0.58	-0.92

Shunday qilib masalaning optimal plani topildi, lekin bu plan butun sonli emas. Birinchi tenglamaning kasr qismi eng katta bo‘lgani uchun, shu birinchi qatorga nisbatan kesuvchi tenglama tuzamiz:

$$\frac{1}{6}x_3 - \frac{1}{6}x_4 \geq \frac{1}{2}$$

Bu tengsizlikning ikki tomoniga (-1) ni ko‘paytirib, x_5 qo‘shimcha o‘zgaruvchini kiritamiz. Natijada quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$-\frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_4 + x_5 = -\frac{1}{2},\quad \text{ya'ni} \qquad -0.17x_3 + 0.17x_4 + x_5 = -0.5$$

Bu oxirgi tenglamada barcha koeffitsientlarning butun qismlari nolga teng bo‘lgani sabab, ular o‘zgarishsiz qoladi. Uni jadvalning oxiriga joylashtiramiz.

4.

BO‘	1	$-x_4$	$-x_3$
x_2	0.5	-0.17	0.17
x_1	2.25	0.25	0.25
x_5	-0.5	0.17	-0.17
Z	0.75	-0.58	-0.92

Simpleks almashtirish qilib quyidagi jadvalga ega bo‘lamiz.

BO	1	$-x_4$	$-x_5$
x_2	0.0	0.0	1.0
x_1	1.5	0.5	1.5
x_3	3.0	-1.0	-6.0
Z	3.5	-1.5	-5.5

Endi simpleks jadvalning ikkinchi qatoriga nisbatan kesuvchi tenglamani tuzamiz.

$$1.5x_4 + 0.5x_4 \ge 1.5$$

Bu tengsizlikda koeffitsientlar butun qismi noldan katta bo‘lgani sabab $q_i=x_i-[x_i]$, $q_{ij}=a_{ij}-[a_{ij}]$ lardan foydalanib ularning kasr qismini ajratamiz, ya'ni

$q_2=1.5-[1.5]=1.5-1=0.5$, $q_{24}=1.5-[1.5]=1.5-1=0.5$.

Tengsizlikning ikki tomoniga (-1) ni ko‘paytirib, x_6 qo‘shimcha o‘zgaruvchini kiritamiz.

Natijada quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$-0.5x_4 - 0.5x_5 + x_6 = -0.5, \text{ ya'ni } -\frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 + x_6 = -\frac{1}{2}$$

Uni jadvalning oxiriga joylashtiramiz.

5.

BO‘	1	$-x_4$	$-x_5$
x_2	0.0	0.0	1.0
x_1	1.5	0.5	1.5
x_3	3.0	-1.0	-6.0
x_6	-0.5	-0.5	-0.5
Z	3.5	-1.5	-5.5

Simpleks almashtirishlar qilib quyidagi jadvalga ega bo‘lamiz.

BO	1	$-x_6$	$-x_5$
x_2	0.0	1.0	0.0
x_1	1.0	1.0	1.0
x_3	4.0	-5.0	-2.0
x_4	1.0	1.0	-2.0
Z	5.0	-4.0	-3.0

Hosil bo‘lgan simpleks jadvalda ozod hadlar ustuni elementlari butun sonlardan iborat. Demak, butun sonli dasturlash masalasi yechimi X=(1,0,4,1) bo‘ladi va Z_{min}=5.

Xulosa

Ushbu maqola chiziqli dasturlash masalalarining butun sonli yechimlarini topishda kesuvchi tenglamalar usulining nazariy asoslari va amaliy qo‘llanilishini atroflicha o‘rganadi. Kesuvchi tenglamalar usuli, ayniqsa, simpleks usuli yordamida olingan kasr sonli yechimlarni butun sonli yechimlarga aylantirishda muhim ahamiyatga ega. Maqolada Gomory usulining asosiy tamoyillari, ya’ni kasr qismlarni ajratish, yangi tengsizliklar tuzish va simpleks jadvalga qo‘shimcha tenglamalar kiritish jarayonlari batafsil yoritilgan. Amaliy misol orqali usulning bosqichma-bosqich qo‘llanilishi ko‘rsatilib, optimal butun sonli yechim sifatida X=(1,0,4,1) va Zmin=5 qiymatlari topilgan. Tadqiqot shuni ko‘rsatadiki, kesuvchi tenglamalar usuli nafaqat nazariy jihatdan muhim, balki resurslarni taqsimlash, ishlab chiqarishni rejalashtirish va logistika kabi sohalarda amaliy muammolarni hal qilishda samarali vositadir. Shu bilan birga, usulning katta hajmdagi masalalarda samaradorligini oshirish va hisoblash tezligini optimallashtirish bo‘yicha kelgusidagi tadqiqotlar zarurligi ta’kidlanadi. Maqola butun sonli dasturlash sohasida ishlaydigan tadqiqotchilar va amaliyotchilar uchun muhim manba bo‘lib xizmat qiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Gomory, R. E. (1958). Outline of an algorithm for integer solutions to linear programs. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 64(5), 275–278.
2. Dantzig, G. B. (1963). *Linear Programming and Extensions*. Princeton University Press.
3. Land, A. H., & Doig, A. G. (1960). An automatic method for solving discrete programming problems. *Econometrica*, 28(3), 497–520.
4. Nemhauser, G. L., & Wolsey, L. A. (1988). *Integer and Combinatorial Optimization*. Wiley-Interscience.
5. Wolsey, L. A. (1998). *Integer Programming*. Wiley.
6. Tursunov, A., & boshqalar. (2010). Optimallashtirish masalalari va ularning iqtisodiy masalalarga qo‘llanilishi. *O‘zbekiston matematika jurnali*, 2, 45–52.