CHIZIQLI ALGEBRAIK TENGLAMALAR SISTEMASI

Ismoilov Axrorjon
Farg'ona davlat universiteti amaliy matematika va informatika kafedrasi katta o'qituvchisi. Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori(PHD)
ismoilovaxrorjon@gmail.com
G'ulomjonov Javohir Shavkatjon o'g'li
Farg'ona Davlat Universtiteti 3- kurs talabasi
gulomovj83@gmail.com

Annotatsiya: *Ushbu matnda nazariy va tatbiqiy matematikadagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining yechimi muammolari ko'rib chiqilgan. Matritsalar yordamida tenglamalar sistemasini soddalashtirish, aniq va iteratsion metodlarning asosiy xususiyatlari, ularning afzallik va cheklovlari bayon etilgan. Shuningdek, metodlarning matematik asoslari, xususan noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish, matritsalarni ajratish va ortogonal yordamchi vektorlar usullari tushuntiriladi. Zamonaviy hisoblash texnikasining imkoniyatlari va ularning amaliy qo'llanilishi haqida ham qisqacha ma'lumot berilgan.*

Kalit so'zlar: *Chiziqli algebraik tenglamalar, tenglamalar sistemasini yechish, aniq metodlar, iteratsion metodlar, matritsalar, matritsalarni ajratish, noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish, ortogonal vektorlar, chekli-ayirmali tenglamalar, funksiyalar interpolatsiyasi, o'rta kvadratlar metodi, hisoblash texnikasi, determinant, teskari matritsa.*

Abstract: *This text examines the problems related to solving systems of linear algebraic equations in theoretical and applied mathematics. It explains the simplification of equation systems using matrices, the main features of direct and iterative methods, as well as their advantages and limitations. Furthermore, the mathematical foundations of the methods are discussed, specifically the successive elimination of unknowns, matrix decomposition, and orthogonal auxiliary vector techniques. A brief overview of the capabilities of modern computational technology and its practical applications is also provided.*

Keywords: *Linear algebraic equations, solving systems of equations, direct methods, iterative methods, matrices, matrix decomposition, successive elimination of unknowns, orthogonal vectors, finite difference equations, function interpolation, least squares method, computational techniques, determinant, inverse matrix.*

Аннотация: *В данном тексте рассматриваются проблемы решения систем линейных алгебраических уравнений в теоретической и прикладной математике.*

Объясняется упрощение систем уравнений с помощью матриц, основные особенности прямых и итерационных методов, а также их преимущества и ограничения. Кроме того, обсуждаются математические основы методов, в частности последовательное исключение неизвестных, разложение матриц и методы ортогональных вспомогательных векторов. Также приводится краткий обзор возможностей современной вычислительной техники и её практического применения.

Ключевые слова: *Линейные алгебраические уравнения, решение систем уравнений, точные методы, итерационные методы, матрицы, разложение матриц, последовательное исключение неизвестных, ортогональные векторы, конечно-разностные уравнения, интерполяция функций, метод наименьших квадратов, вычислительная техника, детерминант, обратная матрица.*

Nazariy va tatbiqiy matematikanıń kópgina masalalari chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishga olib keladi. Masalan, funksiyani uning n–1 ta nuqtada berilgan qiymatlari yordamida n-tartibli kóphad bilan interpoliyatsiyalash yoki funksiyani órta kvadratlar usuli yordamida yaqinlashtirish masalalari chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishga keltiriladi.Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilishnıń asosiy manbai uzluksiz funksional tenglamalarni chekli-ayirmali tenglamalar bilan yaqinlashtirishdir. Masalan, Laplas differentsial operatori uchun Dirixle masalasini tartibi yuqori bógan oddiy chekli-ayirmali tenglamalar sistemasiga almashtirish mumkin. EHMlar yaratilishi bilan bunday masalalar yana ham kópayib bormoqda.

Bir jinsli bólmagan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish masalasi bilan matritsalarnıń teskarisini topish va determinantlarni hisoblash masalalari uzviy ravishda bog‘langandir. Bu masalalar nazariy jihatdan osongina yechiladi. Lekin matritsalarnıń tartibi ortgan sari bu masalalarni amalda yechish juda katta hisoblashlarni talab qiladi. Hozirgi vaqtda bu masalalarni yechish uchun juda kóp metodlar yaratilgan va ularni takomillashtirish ustida jadal ishlar olib borilmoqda.

Chiziqli algebraik tenglamalarni yechish asosan ikki — aniq va iteratsion metodlarga bólinadi. Aniq metod deganda shunday metod tushuniladiki, uning yordamida chekli miqdordagi arifmetik amallarni aniq bajarish natijasida masalaning aniq yechimini topish mumkin. Hammaga ma’lum bógan Krammer qoidasi aniq metodga misol bóla oladi. Lekin Krammer qoidasi odatda, amalda ishlatilmaydi, chunki bu metod bilan n-tartibli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish uchun $n! \cdot n^2$ tartibdagi arifmetik amallarni bajarish kerak. Bu nihoyatda katta son bólib, bu qoida bilan hatto $n = 30$ tartibli sistemani yechish uchun ham hozirda mavjud bógan EHMlar ham ojizlik qiladi. metodlarni ko‘rib chiqamiz. Bularning ko‘pchiligi noma’lumlarni ketma-ket yo‘qotish g‘oyasiga asoslangan.Iteratsion metodlar shu bilan xarakterlanadiki, chiziqli, algebraik tenglamalar sistemasining yechimi ketma-ket yaqinlashishlarning limitidek topiladi. Iteratsion metodlarni qo‘llayotganda faqat ularning yaqinlashishlariga emas, balki yaqinlashishlarning tezligi ham katta ahamiyatga egadir. Bu ma’noda har bir iteratsion metod universal bólavermaydi. Bu metodlar ayrim sistemalar uchun juda tez yaqinlashib, boshqa sistemalar uchun sekin yaqinlashishi yoki umuman yaqinlashmasligi ham mumkin. Shuning uchun ham iteratsion metodlarni qo‘llayotganda sistemani avval tayyorlab olish kerak.Buning ma’nosi shundaki, berilgan sistemani unga teng kuchli bólgan shunday sistemaga almashtirish kerakki, hosil bo‘lgan sistema uchun tanlangan metod tez yaqinlashsin. Hozirgi zamon EHMlari yordamida aniq metodlar bilan tartibi 10^3 dan katta bo‘lmagan, iteratsion metodlar bilan esa tartibi 10^6 dan ortmaydigan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish mumkin. Avval aniq metodlarning umumiy g‘oyasini ko‘rib chiqaylik. Bu metodlar asosan uch sinfga bólinadi:

1. noma’lumlarni ketma-ket yo‘qotish metodlari;
2. matritsalarni ajratishga asoslangan metodlar;
3. birormetrikada ortogonal bo‘lgan yordamchi vektorlar sistemasini tuzishga asoslangan metodlar.

Sistemadagi tenglamalardan noma’lumlarni ketma-ket yo‘qotish metodi qadimiy metodlardandir. Bu metodni ikki yo‘l bilan amalga oshirish mumkin:

a) tenglamalarning kerakli kombinatsiyalarini tuzish;

b) almashtirishning har bir qadamida sistema matritsasining biror elementini yoki bir ustundagi diagonal element ostidagi barcha elementlarini nolga aylantirish maqsadida bu matritsani maxsus ravishda, tanlab olingan matritsaga ko‘paytirishdan iboratdir.

Har ikkala holatda ham diqqat-e’tibor shunga yo‘naltiriladiki, almashtirishlar natijasida berilgan sistema unga teng kuchli bo‘lgan sistemaga o‘tishi va so‘nggi sistema sodda ko‘rinishga ega bo‘lishi kerak.

Matritsalarni ajratishga asoslangan metodlar g‘oyaviy jihatdan noma’lumlarni ketma-ket yo‘qotish metodlariga juda yaqin turadi. Bu yerda sistemaning matritsasi asosan uchburchak, diagonal yoki akslantirish matritsalarining ko‘paytmalariga ajratiladi.

Uchinchi sinfga kiradigan metodlar hozirgi vaqtda keng tarqalgan metodlardir. Bu metodlarda izlanayotgan yechim maxsus ravishda qurilgan yordamchi vektorlar sistemasidagi oxirgi vektordan iborat. Bu gruppadagi metodlarning eng birinchisi ortogonalashtirish metodidir. Yuqarida aytilgan barcha metodlarning umumiy mohiyatini quyidagi sxemada bayon qilish mumkin. Faraz qilaylik, quyidagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin:

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

Bu tenglikning xar ikkala tomonini chapdan ketma-ket shunday $L_1, L_2, \dots L_k$ matritsalarga ko‘paytiramizki, natijada xosil bo‘lgan yangi

$$L_k L_{k-1} \dots L_1 \, A\bar{x} = L_k L_{k-1} \dots L_1 \bar{b}$$

sistema avvalgisiga ekvivalent bo‘lib, soddaroq yechilsin. Buning uchun $B = L_k L_{k-1} \dots L_1, A$ matritsaning uchburchak, diagonal yoki orthogonal (agat $BB' = B'B = E$ bo‘lsa, B matritsa orthogonal deyiladi) bo‘lishi kifoyadir. Agar shu bilan birga L_1

matritsalar maxsusmas bo‘lsa, teskari matritsa A^{-1} va detirminant $\det A$ ni topish uchun quidagi formulalarga ega bo‘lamiz

$$A^{-1} = B^{-1}L_k L_{k-1} \dots L_1,$$

$$\det A = \frac{\det B}{\prod_{L=1}^{n} \det L_1}$$

Xulosa: Nazariy va tatbiqiy matematikaning ko‘p masalalari chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish bilan bog‘liq bo‘lib, ularning yechimi ko‘plab sohalarda, jumladan funksiyalarni interpolatsiya qilish va o‘rta kvadratlar metodida qo‘llanadi. Chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilishning asosiy manbai funksional tenglamalarni chekli-ayirmali tenglamalar bilan yaqinlashtirishdir. Bu jarayonda turli metodlar, xususan aniq va iteratsion metodlar qo‘llaniladi. Aniqlik metodlari arifmetik amallarni aniq bajarishga asoslangan bo‘lsa, iteratsion metodlar ketma-ket yaqinlashish tamoyiliga asoslanadi va ularning samarasi tizimning tabiati va tanlangan metodga bog‘liq. Matritsalarni ajratish, noma’lumlarni ketma-ket yo‘qotish va ortogonal yordamchi vektorlar metodlari tizimlarni samarali yechishda keng qo‘llaniladi. Zamonaviy EHMlar yordamida, tizimlarning kattaligiga qarab, yuqorida ko‘rsatilgan metodlar yordamida samarali yechimlar topish mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Alberg Dzh., Nilson E., Uolsh Dzh. Teoriya splinev i ikh prilozheniya. M., “Mir”, 1972.
2. Bakhvalov N. S. Chislennye metody, t. I, M., “Nauka”, 1973.
3. Bakhvalov N. S. Ob optimalnykh otsenkakh skorosti skhodimosti kvadraturnykh protsessov i metodov integrirovaniya tipa Monte-Karlo na klassicheskikh funktsiyakh, Sb. “Chislennye metody resheniya differentsialnykh i integralnykh uravneniy i kvadraturnye formuly”. M., “Nauka”, 1964 (5—6 3-betlar).
4. Berezin I. S., Zhidkov N. P. Metody vychisleniy, t. 1., izd. 3-e. M., “Nauka”, 1966.
5. Buslenko N. P. i dr. Metody statisticheskikh ispytaniy (metod Monte-Karlo). M., Fizmatgiz, 1962.
6. Varga R. Funktsional'nyy analiz i teoriya approksimatsii v chislennom analize. M., “Mir”, 1974.
7. Voevodin V. V. Chislennye metody algebry. Teoriya i algoritmy. M., “Nauka”, 1966.
8. Gelfond A. O. Ischislenie konechnykh raznostey, 3-e ispravl. izd. M., “Nauka”, 1967.
9. Goncharov V. L. Teoriya interpolirovaniya i priblizheniya funktsiy, 2-e pererabotannoe izd. M., Gostekhizdat, 1954.
10. Daugavet I. K. Vvedenie v teoriyu priblizheniy funktsiy, izd. LGU, Leningrad, 1977.