

FREDGOLM INTEGRAL TENGLAMALARI

Mahmudov Oybekjon Shuxratjon o'g'li

Farg'ona Davlat Universiteti 3- kurs talabasi

oybekjonmahmudov155@gmail.com**Mo'ydinjonov Samandar O'tkirjon o'g'li**

Farg'ona Davlat Universiteti 3- kurs talabasi

samandar6420@gmail.com

Annotatsiya: Mazkur maqolada integral tenglamalarni yechishning eng umumiy usullaridan biri bo'lgan ketma-ket yaqinlashish usuli ya'ni funksional qatorlar yordamida yechim topish batafsil tahlil qilinadi. Volterra tipidagi integral tenglama uchun ketma-ketlik orqali yechim qurilishi bosqichma-bosqich ko'rib chiqiladi. Qatorning absolyut va tekis yaqinlashuvini ta'minlovchi shartlar asosida yagona yechim mavjudligi isbotlanadi. Shuningdek, bu usulning nazariy asoslari bilan birga yechimning mavjudligi va yagonaligi to'g'risidagi teorema ham keltirilib, u isbotlanadi

Kalit so'zlar: integral tenglama, funksional qator, ketma-ket yaqinlashish, tekis yaqinlashuv, yagona yechim, uzluksizlik.

Abstract: This article provides a detailed analysis of one of the most general methods for solving integral equations – the method of successive approximations, also known as the method of functional series. The step-by-step construction of the solution via a sequence for a Volterra-type integral equation is discussed. The conditions under which the series converges absolutely and uniformly are established, and the uniqueness of the solution is proven. In addition to the theoretical foundation of the method, a uniqueness and existence theorem for the solution is also presented and proved.

Keywords: integral equation, functional series, successive approximations, uniform convergence, unique solution, continuity.

Аннотация: В данной статье подробно рассматривается один из наиболее общих методов решения интегральных уравнений — метод последовательных приближений, то есть метод функциональных рядов. Пошагово изложено построение решения для интегрального уравнения типа Вольтерра с использованием последовательности функций. Доказаны условия, обеспечивающие абсолютную и равномерную сходимость ряда, а также единственность решения. Кроме того, приводится и доказывается теорема об существовании и единственности решения с теоретическим обоснованием данного метода.

Ключевые слова: интегральное уравнение, функциональный ряд, последовательные приближения, равномерная сходимость, единственное решение, непрерывность.

Kirish: Integral tenglamalar matematik fizika, muhandislik hamda boshqa tabiiy fanlarda keng qo'llaniladi. Ayniqsa, chiziqli integral tenglamalarni yechish metodlari matematik model qurishda muhim rol o'ynaydi. Bunday tenglamalarning ko'pgina hollarda aniq yechimlari mavjud emasligi sababli ularni yechishning iteratsion usullari ishlab chiqilgan. Shulardan biri – ketma-ket yaqinlashish usuli bo'lib, u orqali tenglamaning yechimi funksional qator sifatida ifodalanadi.

Mazkur maqolada klassik ko'rinishdagi chiziqli Fredgolm integral tenglamasi uchun ketma-ket yaqinlashish usuli asosida yechim topish yo'li ko'rib chiqiladi. Bu usul yordamida yechimni aniqlash nafaqat matematik jihatdan asoslanadi, balki hisoblashlar nuqtayi nazaridan ham qulaylik yaratadi. Metodning asosiy afzalligi – u orqali qatorning har bir hadi rekursiv tarzda aniqlanadi va umumiy yechimga yaqinlashadi. Bundan tashqari, berilgan shartlar asosida yagona yechim mavjudligini kafolatlovchi teorema ham keltiriladi.

Integral tenglamalarni yechishning eng umumiy usullaridan biri ketma-ket yaqinlashish usuli yoki funksional qator yordami bilan yechish usulidir.

Shunday qilib, ushbu

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt \quad (1)$$

tenglama berilgan bo'lib, bu yerda $f(x)$ ozod had $I(a \leq x \leq b)$ kesmada noldan farqli uzluksiz funksiya; $K(x, t)$ yadro $P(a \leq x \leq b, a \leq t \leq b)$ sohada noldan farqli uzluksiz funksiya; a, b, λ lar esa o'zgarmas haqiqiy sonlar deb faraz qilinadi ($\lambda \neq 0$).

Berilgan (1) tenglamaning yechimini quyidagi qator shaklida izlaymiz:

$$u(x) = u_0(x) + \lambda u_1(x) + \lambda^2 u_2(x) + \dots + \lambda^n u_n(x) + \dots, \quad (2)$$

bundagi $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$ lar nomalum funksiyalar. Ularni shunday tanlab olish kerakki, natijada (2) qator (1) integral tenglamaning yechimi bo'lsin.

Ana shu maqsadda, (2) ni tenglamaning yechimi deb hisoblab, (1) tenglamaga qo'yamiz:

$$\begin{aligned} & u_0(x) + \lambda u_1(x) + \lambda^2 u_2(x) + \dots + \lambda^n u_n(x) + \dots \\ & f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) [u_0(x) + \lambda u_1(x) + \lambda^2 u_2(x) + \dots] dt = \\ & f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u_0(x) dt + \lambda^2 \int_a^b K(x, t) u_1(x) dt \dots \end{aligned}$$

Biz (2) funksional qatorni biror intervalda tekis yaqinlashuvchi deb faraz qilamiz, shu sababli uni hadlab integrallash mumkin. Bu ayniyatni ikki tomonidagi bir xil darajali λ larning koeffitsiyentlari teng bo'ladi, ya'ni

$$\begin{aligned} u_0(x) &= f(x), \\ u_1(x) &= \int_a^b K(x, t) u_0(x) dt, \\ u_2(x) &= \int_a^b K(x, t) u_1(x) dt, \\ &\dots \end{aligned}$$

(3)

$$u_n(x) = \int_a^b K(x, t) u_{n-1}(x) dt,$$

Endi bu ifodani yuqoridan boshlab birin-ketin o'zidan keyingisiga qo'yib chiqamiz, natijada quyidagi ifoda hosil bo'ladi:

$$u_0(x) = f(x),$$

$$u_1(x) = \int_a^b K(x, t) f(t) dt,$$

$$u_2(x) = \int_a^b K(x, t) \int_a^b K(t, t_1) f(t_1) dt_1 dt,$$

.....

$$u_n(x) = \int_a^b K(x, t) \int_a^b K(t, t_1) \dots \int_a^b K(t_{n-2}, t_{n-1}) f(t_{n-1}) dt_{n-1} \dots dt_1 dt,$$

Mana shu ifodalar yordamida (2) qatorni ushbu

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) f(t) dt + \lambda^2 \int_a^b K(x, t_1) \int_a^b K(t_1, t_2) f(t_2) dt_2 dt_1 + \dots \quad (4)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu cheksiz qatorning umumiy hadi

$$u_n(x) = \lambda^n \int_a^b K(x, t) \int_a^b K(t, t_1) \int_a^b K(t_{n-2}, t_{n-1}) f(t_{n-1}) dt_{n-1} \dots dt_1 dt \quad (5)$$

bo'ladi. Yuqoridagi keltirilgan shartga ko'ra, I kesmada hamda P sohada

$$|f(x)| \leq N \quad N > 0 \quad K(x, t) \leq M \quad M > 0.$$

Bu yerdagi M va N o'zgarmas haqiqiy sonlardir. Shunga asosan (5) dan ushbu

$$|u_n(x)| \leq |\lambda|^n N M^n (b-a)^n = N[|\lambda| M (b-a)]^n$$

tengsizlik hosil bo'ladi. Malumki, o'ng tomondagi ifoda cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning, ya'ni yaqinlashuvchi qatorning umumiy hadi bo'lishi uchun

$$q = |\lambda| M (b-a) < 1 \quad |\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$$

bo'lishi shart. Shundagina (4) qator I intervalda absolyut va tekis yaqinlashuvchi qator bo'ladi. Biz hozircha (4) qator (1) tenglamaning yechimi ekanligini ko'rsatdik. Endi undan boshqa yechimi yo'qligini ko'rsatamiz. Buning uchun aksincha faraz qilamiz, yani (1) tenglamaning yana bitta uzluksiz $v(x)$ yechimi bor deb faraz qilamiz. U holda

$$v(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) v(t) dt.$$

buni (1) dan ayiramiz.

$$u(x) - v(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) [u(x) - v(t)] dt:$$

$$u(x) - v(x) = a(x)$$

deb belgilab olaylik. U holda yuqoridagi tenglikni

$$a(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) a(t) dt \quad (6)$$

ko'rinishida yozish mumkin. Malumki, $a(x)$ ayirma I kesmada uzluksiz bo'lgani uchun chegaralangan bo'ladi, ya'ni

$$|a(x)| < A \quad A > 0.$$

shunga asosan

$$|a(x)| \leq |\lambda| \int_a^b |K(x, t)| |a(t)| dt \leq |\lambda| M A (b - a).$$

bundan foydalanib, (6) tenglikdan quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz:

$$|a(x)| \leq |\lambda| \int_a^b |K(x, t)| |a(t)| dt \leq |\lambda| M A (b - a) = A |\lambda|^2 M^2 (b - a)^2$$

buni yana (6) ga qo'yish natijasida

$$|a(x)| \leq A |\lambda|^3 M^3 (b - a)^3$$

hosil bo'ladi. Umuman, shu jarayonni n marta takrorlasak,

$$|a(x)| \leq A [|\lambda| M (b - a)]^n \quad (7)$$

hosil bo'ladi.

$$q = |\lambda| M (b - a) < 1$$

bo'lgani uchun, n cheksizlikka intilganda, (7) ning o'ng tomoni nolga intiladi. Shu sababli $\alpha(x) \equiv 0$, yani $v(x) \equiv u(x)$ bo'ladi. Demak ikkala yechim aslida bitta ekan.

Shunday qilib, quyidagi teorema isbot qilindi.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya I kesmada noldan farqli, uzluksiz bo'lib, ushbu

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$$

Tengsizlik bajarilsa, u holda

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt$$

tenglama I kesmada absolyut va tekis yaqinlashuvchi (2) qatordan iborat faqat birgina yechimga ega bo'ladi.

Misollar yechishda $u_0, u_1, u_2, \dots$ larning ifodalarini (3) formulalar yordamida topib, so'ngra ularni (2) qatorga qo'yib chiqish ishni osonlashtiradi.

Xulosa: Integral tenglamalarni yechishda ketma-ket yaqinlashish usuli ishonchli va samarali metodlardan biri hisoblanadi. Ushbu maqolada bu usul asosida integral tenglamaning yechimi funksional qator sifatida qurildi va uning konvergentligi shartlari aniqlandi. Yechimning mavjudligi va yagona ekanligi matematik asosda isbotlandi. Ayniqsa, ifodaning har bir hadi oddiy integral orqali topilishi uni amaliy masalalarda qulay qo'llash imkonini yaratadi.

Natijalar shuni ko'rsatadiki, agar berilgan yadroning qiymati va parametrlar orasida

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$$

sharti bajarilsa, unda integral tenglama yagona va tekis yaqinlashuvchi qator ko'rinishida yechimga ega bo'ladi. Bu esa usulni matematik analizda ham, numerik hisoblashlarda ham muvaffaqiyatli qo'llash imkonini beradi.\

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Lovitt U.V. Chiziqli integral tenglamalar. GTTI nashriyoti, 1933-yil.
2. Mixlin S.G. Integral tenglamalar nazariyasi. Moskva: FizMatGiz, 1959-yil.
3. Petrovskiy I.G. Integral tenglamalar nazariyasidan ma'ruzalar. Moskva: Nauka nashriyoti, 1965-yil.
4. Trikom F. Integral tenglamalar. Tarjimasi – IL nashriyoti, 1960-yil.
5. Demidovich B.P., Maron A.I. Hisoblash matematikasining asoslari. Moskva: Nauka, 1970-yil.
6. Berezin I.S., Jitkov N.P. Hisoblash usullari. Moskva: FizMatGiz, 1966-yil (1-jild, 3-nashr), 1962-yil (2-jild, 2-nashr).
7. Maqsudov Sh.T. Chiziqli integral tenglamalar elementlari. Toshkent: O'qituvchi, 1980-yil.
8. Demidovich B.P., Maron A.I., Shuvalova E.Z. Tahlilning sonli usullari. Moskva: Nauka, 1968-yil.
9. Davyidov E.G. Scientific WorkPlace 3.0 matematik dasturiy to'plami: oliy matematika kursida qo'llanish texnologiyasi va amaliy masalalarni yechish. O'quv qo'llanma, MADI (GTU), Moskva, 2002-yil. – 105 bet.
10. Davyidov E.G. Scientific WorkPlace 4.0 integratsiyalashgan tizimi: ishlash texnologiyasi va masalalarni yechish amaliyoti. Moskva: Moliyaviy va statistika nashriyoti, 2003-yil. – 208 bet.
11. Alekseev E.R., Chesnokova O.V. Mathcad 12, Matlab 7, Maple 9 paketlarida hisoblash matematikasi masalalarini yechish (O'quv qo'llanma). Moskva: NT Press, 2006-yil. – 496 bet.
12. Davyidov E.G. Scientific WorkPlace dasturi: qo'llash xususiyatlari // Exponenta Pro. Amaliy matematika. 2003-yil, №4, 9–13-betlar.