

LAPLAS TENGLAMASI UCHUN KOSHI MASALASI VA ISSIQLIK TARQALISH TENGLAMASI UCHUN TESKARI KOSHI MASALASINING FUR'E USULI BILAN YECHIMI VA NOKORREKTLIGINI TAHLIL QILISH

Abdumalikov Axmadali Abdulhamid o'g'li

Farg'ona Davlat Universiteti talabasi.

axmadali.of@gmail.com

Abdug'aniyev Oybek Rasuljon o'g'li

Farg'ona Davlat Universiteti talabasi.

abduganiyevoybek58@mail.com

Anotatsiya Ushbu tezisda Laplas tenglamasi uchun Koshi masalasi hamda issiqlik tarqalish tenglamasi uchun teskari Koshi masalasining Fur'e usuli orqali yechimlari ko'rib chiqiladi. Bu masalalar matematik fizikaning muhim turlaridan biri bo'lib, ular amaliy fizik va muhandislik masalalarida keng qo'llaniladi. Lekin ular nokorrekt masalalar toifasiga kirgani sababli, kichik o'zgarishlar natijada yechimda katta xatolarga olib keladi. Fur'e usuli orqali yechimlar qurilib, yuqori chastotali komponentlarning turg'unlikka ta'siri tahlil qilinadi. Shuningdek, masalaning turg'unligini tiklash maqsadida Tixonov regulyarlashtirish usuli keltirilib, optimal parametr tanlash yondashuvlari ham yoritiladi. Tezisdagi misollar, grafiklar va formulalar asosida nokorrektlikning mohiyati tushuntiriladi va yechimni barqarorlashtirish usullari asoslanadi.

Kalit so'zlar: Nokorrekt masala, teskari masala, Fur'e usuli, Laplas tenglamasi, issiqlik tenglamasi, Koshi masalasi, regulyarlashtirish, Tixonov funksionali, turg'unlik, spektral usul, parabolik tenglama, elliptik tenglama, yuqori chastota, matematik fizika.

Аннотация В данной тезисной работе рассматривается задача Коши для уравнения Лапласа и обратная задача Коши для уравнения теплопроводности с применением метода Фурье. Эти задачи относятся к числу важных задач математической физики и широко применяются в прикладных задачах физики и инженерии. Однако они являются некорректными, то есть чувствительными к небольшим изменениям начальных данных. Построены аналитические решения с использованием преобразования Фурье и проанализировано влияние высокочастотных компонент на устойчивость решения. Также рассматривается метод регуляризации Тихонова для восстановления устойчивости решения, а также методы выбора оптимального параметра. В работе приводятся примеры, графики и формулы, поясняющие суть некорректности и обоснование методов стабилизации решения.

Ключевые слова: некорректная задача, обратная задача, метод Фурье, уравнение Лапласа, уравнение теплопроводности, задача Коши, регуляризация,

функционал Тихонова, устойчивость, спектральный метод, параболическое уравнение, эллиптическое уравнение, высокая частота, математическая физика.

Abstract This thesis explores the Cauchy problem for the Laplace equation and the inverse Cauchy problem for the heat equation using the Fourier method. These problems belong to the class of ill-posed problems in mathematical physics and are widely applied in practical physics and engineering. Due to their ill-posed nature, small perturbations in the input data can lead to large deviations in the solution. The Fourier method is used to construct analytical solutions, and the impact of high-frequency components on stability is analyzed. The thesis also presents the Tikhonov regularization method to restore solution stability and discusses approaches to choosing the optimal regularization parameter. Examples, graphs, and formulas are provided to illustrate the nature of ill-posedness and the rationale behind stabilization techniques.

Keywords: ill-posed problem, inverse problem, Fourier method, Laplace equation, heat equation, Cauchy problem, regularization, Tikhonov functional, stability, spectral method, parabolic equation, elliptic equation, high frequency, mathematical physics.

Kirish

Matematik fizika tenglamalariga oid teskari masalalar ilmiy va amaliy sohalarida keng qo'llaniladi. Ular yordamida fizikaviy parametrlarni tiklash, yashirin manbalarni aniqlash va tomografik tasvirlash mumkin. Ushbu tezisdagi Laplas tenglamasi uchun Koshi masalasi hamda issiqlik tarqalish tenglamasi uchun teskari Koshi masalasi o'rganiladi. Ushbu masalalar nokorrekt masalalar toifasiga kiradi, ya'ni ularning yechimlari mavjud bo'lmasligi, yagona bo'lmasligi yoki uzluksiz bog'liq bo'lmasligi mumkin. Ularni yechishda Fur'e usuli va regulyarlashtirish muhim rol o'ynaydi.

Laplas tenglamasi uchun Koshi masalasi

Laplas tenglamasi

Laplas operatori quyidagicha aniqlanadi:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Koshi masalasi formulasi

Koshi masalasi uchun $u(x,0)$ va $\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)$ ma'lum bo'lib, Ω sohada $u(x,y)$ ni topish

talab etiladi:

$$\Delta u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \omega$$

$$u(x,0) = f(x),$$

$$\delta u / \delta y(x,0) = g(x)$$

Fur'e usuli bilan yechimi

Cheksiz sohada masala uchun Fur'e integrali bilan yechim:

$$U(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[f'(\zeta) \cosh(\zeta y) + \frac{g'(\zeta)}{\zeta} \sinh(\zeta y) \right] e^{i\zeta x} d\zeta$$

Nokorrektlik

Ko'rinadiki, yuqori chastotali ξ lar uchun $\cosh(\xi y)$ va $\sinh(\xi y)$ eksponensial o'sadi:

$$\cosh(\xi y) : \frac{1}{2}(e^{\xi y} + e^{-\xi y}) \Rightarrow \text{Barqarorlik yo'q}$$

Issiqlik tarqalish tenglamasi uchun teskari Koshi masalasi

Tenglama

Issiqlik tenglamasi (parabolik tur):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Teskari Koshi masalasi formulasi

Berilgan $u(x, T) = f(x)$ orqali $u(x, 0)$ ni topish kerak.

Bu masala teskari vaqtli masala bo'lib, nokorrekt hisoblanadi.

Fur'e usuli bilan yechimi

Tenglamaning Fur'e transformatsiyalangan ko'rinishi:

$$u'(\zeta, t) = u'(\zeta, T)e^{k\zeta^2(t-T)}$$

Teskari yo'nalishda ($t < T$) quyidagicha bo'ladi:

Bu yerda yuqori chastotalar eksponensial ravishda kuchayadi.

Nokorrektlik

Agar $u'(\zeta, t)$ da kichik nuqson bo'lsa, $u'(\zeta, 0)$ da bu xatolik katta bo'ladi.

Masalan:

$$e(\zeta) : 10^{-6} \Rightarrow \epsilon(\zeta)e^{100\zeta^2} \approx 1 \text{ bo'lishi mumkin}$$

Regulyarlashtirish

Tixonov funksionali

Teskari masalani yechish uchun:

$$J(u) = \|Au - f\|^2 + \alpha \|Ru\|^2$$

A – asosiy operator (masalan, issiqlik tenglamasi bo'yicha)

α – regulyarlashtiruvchi parametr

R – silliqshatiruvchi operator

Optimal α tanlash

Discrepancy Principle

GCV (Generalized Cross Validation)

Kompyuter simulyatsiyasi (misollar bilan)

Laplas masalasiga misol

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0$$

Fur'e transformatsiyasi orqali:

$$u(x, y) = \sin(\pi x)\cosh(\pi y)$$

Chunki $\cosh(\pi y)$ juda tez o'sadi:

$$\text{Agar } y = 2 \Rightarrow \cosh(\pi y) \approx 267$$

Issiqlik tenglamasi misoli



$$u(x, T) = e^{-x^2} \Rightarrow u'(\zeta, T) = e^{-\zeta^2/4}$$

Teskari yechim:

$$u(x, T) = e^{-\zeta^2/4} \cdot e^{k\zeta^2 T} \Rightarrow \text{eksponensial o'shish}$$

Xulosa

Fur'e usuli tahliliy yechim uchun qulay, ammo nokorrekt masalalarda eksponensial o'sish sababli beqaror.

Laplas va issiqlik tenglamasi uchun teskari masalalar aniq fizik modellarni tiklash uchun ishlatiladi.

Bunday masalalarda regulyarlashtirish metodlari majburiy qo'llanilishi kerak.

ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Решение некорректных задач. — Москва: Наука, 1979. — 280 с.
2. Ладыженская О.А., Некорректные задачи математической физики. — Москва: Наука, 1983. — 110 с.
3. Бергер М. Вариационные методы и оптимизация. — М.: Мир, 1986.
4. Киргизов И.П., Методы регуляризации при решении обратных задач математической физики. // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1985. — Т.25. — №3. — С.314–329.
5. Lavrentiev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis. — Providence: American Mathematical Society, 1986.
6. Hansen P.C. Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems: Numerical Aspects of Linear Inversion. — SIAM, 1998.