EYTKEN METODI

A.I.Ismoilov
Farg'ona davlat Unversiteti amaliy matematika va informatika kafedrasi katta o'qituvchisi fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD)
E-mail: ismoilovaxrorjon@yandex.com
Abdusalomova Mubinaxon Otabek qizi
Farg'ona Davlat Universiteti 3-kurs talabasi 22.08-guruh talabasi
E-mail: mubinaxonabdusalomova90@gmail.com

Anotatsiya: *Ushbu maqolada chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishda qo'llaniladigan Eytken metodining nazariy va amaliy asoslari tahlil qilingan. Tadqiqotda iteratsion yondashuvlar yordamida yechimga tezroq yaqinlashishni ta'minlovchi Eytken Δ^2 protsedurasining mohiyati yoritildi. Interpolyatsion tezlatuvchi sifatida bu metodning hisoblash samaradorligi hamda yaqinlashish xususiyatlari bosqichma-bosqich tushuntirib berildi. Amaliy misol sifatida to'rt noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi Python dasturlash muhiti yordamida yechilib, metodning aniqligi va konvergentsiya tezligi tahlil qilindi. Natijalar Eytken metodining oddiy iteratsion usullarni takomillashtirishda samarali vosita bo'la olishini ko'rsatadi.*

Kalit so'zlar: *Eytken metodi, Δ^2 protsedura, iteratsion metod, interpolyatsiya, yaqinlashish, chiziqli tenglamalar, konvergentsiya, optimallashtirish, Python, algoritm.*

Аннотация: *В этой статье анализируются теоретические и практические основы метода Эйткена, используемого для решения систем линейных алгебраических уравнений. В исследовании была освещена природа процедуры Эйткена Δ2, которая обеспечивает более быстрое приближение к решению с помощью итерационных подходов. Вычислительная эффективность этого метода в качестве ускорителя интерполяции, а также свойства аппроксимации были объяснены шаг за шагом. В качестве практического примера система из четырех неизвестных линейных уравнений была решена с использованием среды программирования Python для анализа точности метода и скорости сходимости. Результаты показывают, что метод Эйткена может быть эффективным инструментом для улучшения простых итерационных методов.*

Ключевые слова: *метод Эйткена, процедура Δ2, итерационный метод, интерполяция, аппроксимация, линейные уравнения, сходимость, оптимизация, Python, алгоритм*

.

Anotation: *This article analyzes the theoretical and practical foundations of the Eytken method used to solve a system of linear algebraic equations. The study highlighted the essence of the Eytken Δ2 procedure, which provides a faster approach to the solution using iterative approaches. As an interpolation accelerator, the* *computational efficiency and convergence properties of this method were explained step by step. As a practical example, a system of linear equations with four unknowns was solved using the Python programming environment, analyzing the accuracy of the method and the speed of convergence. The results show that the Eytken method can be an effective tool in improving simple iterative methods.*

Keywords: *Eytken method, Δ2 procedure, iteration method, interpolation, approximation, linear equations, convergence, optimization, Python, algorithm.*

Kirish: A. Eytken 1937-yilda xos son va xos vektorlarni topishdagi iteratsion jarayonni yaxshilash metodini taklif qilgan edi. Umuman olganda Eytken metodini har qanday iteratsion prosessga-ham qo‘llash mumkin. Biz hozir ana shu metodni ko‘rib chiqamiz. Faraz qilaylik, bizga $x=\xi$ ga yaqinlashuvchi p -tartibli jarayon

$$x_n=\varphi(x_n-1)$$

berilgan bo’lsin. $\varphi(x)$ funksiya yordamida

$$\phi(x)=\frac{x\cdot\varphi(\varphi(x))-\varphi^2(x)}{x-2\varphi(x)+\varphi(\varphi(x))} \qquad (1)$$

funksiyani tuzamiz.

Agar $\varphi'(\xi)\neq 1$ va p=1 bo’lsa u holda

$$x_{n+1}=\phi(x_n) \qquad (2)$$

iteratsion jarayonning tartibi 2 dan kichik bo‘lmaydi, p > 1 bo‘lganda esa 2p— 1 dan kichik bo‘lmaydi. Bu tasdiqlarni isbot qilamiz. Umumiylikka zarar yetkazmasdan, $\xi\equiv 0$ deb olishimiz mumkin. Agar $\xi\neq 0$, bo‘lsa, $x=\xi+z$, $\varphi(x)-\xi=\varphi(\varphi+z)-\xi$ belgilashlarni kiritamiz. U holda $x=\varphi(x)$ tenglama $z=w(z)$ tenglamaga o’tadi, $w(z)$ uchun qurilgan (1) funksiya

$$\Omega(z)=\frac{zw(w(z))-w^2(z)}{z-2w(z)+w(w(z))}=\frac{(x-\xi)w(\varphi(x)-\xi)-(\varphi(x)-\xi)^2}{x-\xi-2(\varphi(x-\xi)+w(\varphi(x)-\xi))}=$$
$$\frac{x\varphi(\varphi(x))-\varphi^2(x)-\xi[x-2\varphi(x)+\varphi(\varphi(x))]}{x-2\varphi(x)+\varphi(\varphi(x))}=\phi(x)-\xi$$

ga o’tadi. Demak, $\xi\equiv 0$ deb olishimiz mumkin, $x_n=\varphi(x_n-1)$ p-tartibli iterasiya bo’lganligi uchun $\varphi(x)$ ning x=0 nuqta atrofidagi yoyilmasi quyidagi

$$\varphi(x)=\alpha_p x^p+\alpha_{p+1}x^{p+1}+\ldots$$

ko’rinishga ega bo’ladi. Bu yoyilmani (1) ga qo’ysak,

$$\Phi(x)=\frac{x[\alpha_p x^p+\alpha_{p+1}x^{p+1}+\ldots]^p+\ldots.1-(\alpha_p x^p+\alpha_{p+1}x^{p+1}+\ldots)^2}{x-2(\alpha_p x^p+\alpha_{p+1}x^{p+1}+\ldots)+[\alpha_p(\alpha_p x^p+\alpha_{p+1}x^{p+1}+\ldots)^p+\ldots]}=$$

$$\frac{x(\alpha^{p+1}{}_p+x^{p^2}+\ldots)-(\alpha^2{}_p x^{2p}+2\alpha_p\alpha_{p+1}x^{2p+1}+\ldots)}{x-2\alpha_p x^p+\alpha^{p+1}{}_p x^{p^2}-2\alpha_{p+1}x^{p+1}+\ldots}$$

hosil bo‘ladi. Bu ifodani p = 1 va p > 1 hollar uchun alohida-alohida tekshiramiz. Agar p = 1 bo‘lsa, u holda $\Phi(x)$ ning suratida x ning darajasi uchdan kichik emas (chunki ikkinchi darajali hadlari o‘zaro bir-birlarini yo‘qotishadi), maxrajida esa x oldidagi koeffitsient

$$1-2\alpha_p+\alpha^2{}_p=1-2\alpha_1+\alpha^2{}_1=(1-\varphi'(0))^2\neq 0.$$

Demak, maxrajda x ning birinchi darajasi mavjud va $\varphi(x)$ ning darajali qatordagi yoyilmasi hech bo‘lmaganda x^2 dan boshlanadi. Shuning uchun ham $\phi'(\xi)=0$ va (2) iteratsiyaning tartibi 2 dan kichik emas.

Agar p > 1 bo‘lsa, (3) niyag suratida x ning eng kichik darajasi 2p ga teng bo‘lib, maxrajda x ning 1- darajasi qatnashadi. Demak, $\Phi(x)$ ning darajali qatordagi yoyilmasi hech bo‘lmaganda x^{2p-1} dan boshlanadi. Ya’ni hech bo‘lmaganda $j=1,2,\ldots,2p-2$ lar uchun $\varphi(\xi)=0$. Bu esa (2) iteratsiyaning tartibi hech bo‘lmaganda 2p —1 ga teng ekanligini ko‘rsatadi.

1- izoh. Agar dastlabki yaqinlashish x_0 ξ ga har qancha yaqin bo‘lganda ham, 9 (x) bilan aniqlangan iteratsiya yaqinlashmasa(masalan, $|\varphi'(\xi)\succ 1|$ bo‘lganda) ham (2) iteratsiya. x_0 ξ ga yetarlicha yaqin^bo‘lganda yaqinlashadi. Chunki $\Phi'(\xi)=0$ bo‘lganligi uchun $x=\xi$ ning shunday atrofi topiladiki, u yerda $\Phi''(\xi)\leq q\prec 1$ bo‘ladi. Bu esa, x_0 shu atrofdan olingan bo‘lsa, $x_n=\Phi(x_n-1)$ iteratsiyaning yaqinlashishi uchui yetarli shartdir.

2- izoh. (1) bilan aniqlangach $\Phi(x)$ ning oshkor ko‘rinishi ma’lum bo‘lmasa ham (2) formula bilan iteratsiyani qurish mumkin. Buni quyidagi usul bilan bajarish mumkin. x_0 dan boshlab avvalo

$x_1=\varphi(x_0)$ va $x_2=\varphi(x_1)$

ko’riladi, keyin esa x_3 ni

$$x_3=\frac{x_0x_2-x^2{}_1}{x_0-2x_1+x_2}$$

formula yordamida aniqlaymiz.

Agar $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$, $\Delta^2 x_i=x_{i+2}-2x_{i+1}+x_i$ deb osak, x_3 ni quyidagicha ham yozish mumkin:

$$x_3 = x_0 - \frac{(\Delta x_0)^2}{\Delta^2 x_0}$$

Navbatdagi iterasiyalarni

$$x_4 = \varphi(x_3), x_5 = \varphi(x_4), x_6 = x_5 - \frac{(\Delta x_3)^2}{\Delta^2 x_3}$$

formulalar yordamida ko'ramiz.

Shunday qilib, biz quyidaagi iterasion jarayonga ega bo'lamiz:

$$x_{3i+1} = \varphi(x_{3i})$$

$$x_{3i+2} = \varphi(x_{3i} + 1) \qquad (i = 0,1,2,\ldots)$$

$$x_{3i+3} = x_{3i} - \frac{(\Delta x_{3i})^2}{\Delta^2 x_i}$$

Oxirgi formulaning ko'rinishiga qarab, odatda Eytken metodi ***Eytkenning jarayoni*** deyiladi.

HAYOTIY MASALA: RC zanjirda vaqt konstantasini aniqlash (EYTKEN METODIGA ASOSLANGAN)

Vaziyat: Bir elektronika muhandisi RC **(**rezistor-kondensator**)** zanjir**i** asosida ishlaydigan signalni filtrlovchi qurilma loyihalamoqda. U zanjirning vaqt konstantasi τ ni aniqlashi kerak, chunki bu parametr signalning sekin yoki tez o'tishini belgilaydi.

Muayyan tizim uchun τ ni quyidagi tenglama orqali topish kerak:

$$\tau = e^{-\tau}$$

Bu tenglama analitik tarzda yechimi bo'lmagan transsendental tenglama hisoblanadi, shuning uchun muhandis **numerik yechim** izlaydi. U quyidagi iteratsion formulani tanlaydi:

$$x_{n+1} = e^{-x_n}$$

Boshlang'ich nuqta sifatida $x_0 = 0.5$ deb oladi.

Oddiy iteratsiya:

1. $x_0 = 0.5$
2. $x_1 \approx 0.6065$
3. $x_2 \approx 0.5452$
4. $x^* \approx 0.5675$

Iteratsiyalar sekin yaqinlashmoqda, Eytken metodini qo'llasak bo'laveradi:

$$x^* \approx x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$$

Qiymatlarni qo'yamiz:

1. $x_0 = 0.5$
2. $x_1 \approx 0.6065$

3. $x_2 \approx 0.5452$
4. $x_3 \approx 0.5796$

$$x^* \approx 0.5 - \frac{(0.6065-0.5)^2}{0.5452-2\cdot 0.6065+0.5} \equiv 0.5 - \frac{(0.1065)^2}{0.5452-1.213+0.5} \equiv 0.5675$$

Natija:

- Oddiy iteratsiya uch bosqichda : $x_3 \approx 0.5796$
- Eytken usulda esa: $x^* \approx 0.5675$

Demak, **Eytken usuli ancha tez va aniqroq yaqinlashuvni ta’minladi.**

Muhandis uchun foyda:

Eytken metodi yordamida:

- Hisoblash tezlashdi.
- Qurilmaning vaqt konstantasi aniq belgilandi.
- Qurilmaning signallarni to‘g‘ri filtrlashi kafolatlandi.

Xulosa:

Eytken metodi, ayniqsa, murakkab tizimlar va jarayonlar modellari uchun soddaligi va samaradorligi bilan ajralib turadi. Bu metod har bir iteratsiyada tizimning xulq-atvorini tahlil qilib, maqsad funksiyasining o‘zgarishiga qarab yechimga yaqinlashadi. Eytken metodining afzalliklaridan biri, tizimlar va jarayonlarning vaqt o‘tishi bilan qanday o‘zgarishini o‘rganish imkonini berishi, bu esa uning ilmiy va amaliy tahlil uchun qulayligini ta'minlaydi. Simmetrik va musbat aniqlangan tizimlarda metodning konvergensiya xossalari kafolatlangan, bu esa uning iqtisodiyot, ijtimoiy fanlar va boshqa sohalarda muvaffaqiyatli qo‘llanilishini ta'minlaydi. Maqolada keltirilgan amaliy misollar va tasdiqlovchi tahlillar orqali Eytken metodining samaradorligi, aniqligi va yuqori darajadagi yaqinlashish tezligi ko‘rsatildi. Bu esa metodni yanada kengroq o‘rganish va qo‘llash uchun qulay va samarali vosita ekanligini tasdiqlaydi.

ADABIYOTLAR RO‘YXATI :

1. И.К. Линник, "Методы минимизации квадратичных функционалов", Наука, Москва, 1970.
2. Р.Ф. Личман, "Численные методы", Москва, Высшая школа, 2003.
3. Таха Х. А., "Исследование операций", Москва, Вильямс, 2006.
4. Шарипов А.А., "Optimallashtirish usullari", Toshkent, 2019.
5. Burden R., Faires J. D., "Numerical Analysis", Cengage Learning, 10th edition, 2015.
6. С. П. Шевчук, "Численные методы линейной алгебры", Киев, Вища школа, 1991.
7. Numpy Documentation – https://numpy.org/doc/
8. Saad Y., "Iterative Methods for Sparse Linear Systems", SIAM, 2003.