BA'ZI TENGLAMALARNI FUNKSIYANING SODDA XOSSALARIDAN FOYDALANIB YECHISH.

Isoqova Marxabo Zinnatulloyevna
Temurbeklar maktabi matematika fani o`qituvchisi

Annotsatsiya: *Bu maqolada ba'zi tenglamalarni funksiyaning chegaralanganlik va monotonlik xususiyatidan foydalanib yechish usullari haqida so'z yuritilgan haqida so`z yuritilgan*

Kalit so'zlar: *funksiya, tenglama, chegaralanganlik, monoton, tenglamaning ildizi.*

Tenglama- matematikaning eng muhim tushunchalaridan biri. Ko`pgina amaliy va ilmiy masalalarda biror kattalikni bevosita o`lchsh yoki tayyor formula bo`yichahisoblash mumkin bo`lmasa, bu miqdor qanotlantiradigan munosabat (yoki bir necha munosabat) tuzishga erishiladi. Noma`lum kattalikni aniqlash uchun tenglama (yoki tenglamalar sistemasi)ana shunday hosil qilinadi.

Matematikaning fan sifatida vujudaga kelganidan boshlab uzoq vaqtgacha tenglamalar yechish metodlarini rivojlantirish algebraning asosiy tadqiqot predmeti bo`ldi. Tenglamarni bizga odat bo`lib qolgan harfiy yozilishi XIV asrda uzil-kesil shakllandi; noma`lumlarni lotin alifbosinig oxirgi $x, y, z, \ldots$ harflari, ma`lum miqdorlar (parametrlar) ni latin alifbosining dastlabki $a, b, c, \ldots$harflari orqali belgilash an`anasini fransuz olimi R. Dekartdan boshlangan.

Funksiyaning chegaralanganligidan foydalanish.

Tenglama va tengsizliklarni yechishda biror to'plamda funksiyaning quyidan yoki yuqoridan chegaralanganligi asosiy rol o'ynaydi. Masalan, M to'plamda $f(x) > a$, $g(x) < a$ bo`lsa, u holda $f(x) = g(x)$ tenglama yoki $f(x) < g(x)$ $(f(x) > g(x))$ tengsizlik yechimga ega bulmaydi. Ko'p hollarda $a = 0$ bo'ladi, bunda M to'plamda f(x) va g(x) funksiyalarning ishoralari haqida gapirish mumkin.

1-teorema. Agar haqiqiy sonlarning biror M to`plamida $f(x) \le a, g(x) \le b$ tengsizlik o`rinli bo`lsa, u holda $f(x) + g(x) = a + b$ $(1)$ tenglama M to`plamda $\begin{cases} f(x) = a \\ g(x) = b \end{cases}$ (2) tenglamalar sistemasiga teng kuchli bo`ladi.

Isbot. (2) ning yechimi (1) ning yechimi bo'lishi ravshan. (1) ning yechimi (2) ning yechimi ekanligini ko'rsatamiz. Teskaridan faraz qilamiz. x_0 (1) ning yechimi, lekin (2) ning yechimi bo'lmasin. U holda $f(x_0) < a$ yoki $g(x_0) < b$ bo'ladi. Buni hisobga olsak, $f(x_0)+g(x_0)<a+b$ bo'ladi, ya'ni x_0(1) ning yechimi emas. Bu ziddiyat tasdiqning o'rinli ekanligini isbotlaydi.

2-teorema. Agar haqiqiy sonlarning biror M to`plamida $f(x)\geq a,\ g(x)\leq a$ tengsizlik o`rinli bo`lsa, u holda M to`plamida $f(x)=g(x)$ tenglama $\begin{cases} f(x)=a \\ g(x)=a \end{cases}$ tenglamalar sistemasiga teng kuchli bo`ladi.

Isbot. (2) ning yechimi (1) ning yechimi bo'lishi ravshan. (1) ning yechimi (2) ning yechimi ekanligini ko'rsatamiz. Teskaridan faraz qilamiz. x_0(1) ning yechimi, lekin (2) ning yechimi bo'lmasin. U holda $f(x_0)<a$ yoki $g(x_0)>a$ bo'ladi. Buni hisobga olsak, $f(x_0)<g(x_0)$ bo'ladi, ya'ni x_0(1) ning yechimi emas. Bu ziddiyat tasdiqning o'rinli ekanligini isbotlaydi.

3-teorema. Agar haqiqiy sonlarning biror M to`plamida $|f(x)|\geq a,\ |g(x)|\geq b$ (yoki $|f(x)|\leq a,\ |g(x)|\leq b$) o`rinli bo`lsa ($a$, $b$-musbat sonlar) u holda M to`plamida

$$|f(x)g(x)| = ab \quad (1)$$

tenglama tenglamalarning quyidagi sistemasining birlashmasiga teng kuchli:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)=a \\ g(x)=b \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)=-a \\ g(x)=-b \end{cases} \end{array}\right. \quad (2)$$

Isbot. (2) ning yechimi (1) ning yechimi bo'lishi ravshan. (1) ning yechimi (2) ning yechimi ekanligini ko'rsatamiz. Teskaridan faraz qilamiz. x_0(1) ning yechimi, lekin (2) ning yechimi bo'lmasin. U holda $|f(x_0)|<a$ yoki $|g(x_0)|<a$ ($|f(x_0)|>a$ yoki $|g(x_0)|>a$) bo'ladi. Buni hisobga olsak, $f(x_0)g(x_0)<ab$ $f(x_0)g(x_0)>ab$ bo'ladi, ya'ni x_0(1) ning yechimi emas. Bu ziddiyat tasdiqning o'rinli ekanligini isbotlaydi.

1-misol. $\sin(2x+1)=x^2+2x+3$ tenglamani yeching.

Yechish: Ixtiyoriy x son uchun $\sin(2x+1)\leq 1$ va $x^2+2x+3=(x+1)^2+2\geq 2$ o'rinli, ya'ni tenglamaning chap tomoni 1 dan katta, o'ng tomoni 2 dan kichik bo'la olmaydi. Bundan berilgan tenglamaning ildizi yo'q ekanligi kelib chiqadi.

Javob: ildizi yo'q.

2-misol. $x^3 - x - \sin\pi x = 0$ tenglamani yeching.

Yechish: Ravshanki, 0, -1, 1 sonlari tenglamaning ildizlari bo‘ladi. Uning boshqa ildizlari yo‘qligini ko‘rsatamiz. Buning uchun $f(x) = x^3 - x - \sin\pi x$ funksiyaning toqligidan foydalanamiz, ya’ni $x > 0,\ x \neq 1$ sohani tahlil qilish kifoyadir. Bu sohani $(0;1)$ va $(1;\ \infty)$ oraliqlarga ajratamiz.

Berilgan tenglamani $x^3 - x = \sin\pi x$ ko‘rinishda yozib, uning chap va o‘ng tomonidagi funksiyalarni yuqoridagi oraliqlarda tekshiramiz. $(0;1)$ oraliqda $x^3 < x$ bo‘lganligi sababli $g(x) = x^3 - x$ funksiya faqat manfiy qiymatlar, $h(x) = \sin\pi x$ funksiya esa faqat musbat qiymatlar qabul qiladi. Demak, $(0;1)$ oraliqda berilgan tenglama yechimga ega emas.

$x > 1$ bo‘lganda $g(x)$ funksiya faqat musbat qiymatlar, $h(x) = \sin\pi x$ funksiya har xil ishorali qiymatlar qabul qiladi. Xususan, $(1;\ 2]$ oraliqda $h(x) \leq 0$, demak $(1;\ 2]$ oraliqda ham berilgan tenglama ildizi mavjud emas.

Agar $x > 2$ бўлса, u holda $|\sin\pi x| \leq 1,\ x^3 - x = x(x^2 - 1) > 2 \cdot 3 = 6$ bo‘ladi. Bundan berilgan tenglamaning $(2;\ \infty)$ oraliqda ildizi yo‘q ekanligi kelib chiqadi.

Demak, faqat $x = 0,\ x = -1,\ x = 1$ sonlar tenglamaning yechimi bo‘ladi.

Javob: $x = 0,\ x = -1,\ x = 1$.

3-misol. $\log_3 x + \log_x 3 = 2\cos(6\pi x^2)$ tenglamaning ildizlarini hisoblang.

Yechish: $0 < x < 1$ va $x > 1$ hollarni alohida qaraymiz.

1-hol. $0 < x < 1$ bo`lsin. U holda $\log_3 x < 0$ bo`ladi. $\log_3 x + \log_x 3 = \log_3 x + \dfrac{1}{\log_3 x} \leq -2$ **va** $2\cos(6\pi x^2) \geq -2$ bo`lganligi sababli berilgan tenglama qo`yidagi sistemaga teng kuchli: $\begin{cases} \log_3 x + \log_x 3 = -2 \\ 2\cos(6\pi x^2) = -2 \end{cases}$ Sistemaning 1- tenglamasini yechamiz, $\log_3 x + \dfrac{1}{\log_3 x} = -2,\ \log_3{}^2 x + 2\log_3 x + 1 = 0$, $\log_3 x = -1,\ x = \dfrac{1}{3}$. Bu ildiz $0 < x < 1$ shartni qanoatlantiradi, ammo sistemaning 2-

tenglamasini qanoatlantirmaganligi $\cos\left(6\pi\cdot\frac{1}{9}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}\neq -1$ sababli bu holda tenglama yechimga ega emas.

2-**hol.** $x>1$ bo`lsa, $\log_3 x+\log_x 3=\log_3 x+\frac{1}{\log_3 x}\geq 2$, $2\cos\left(6\pi x^2\right)\leq 2$ bo`lganligi sababli berilgan tenglama qo`yidagi sistemaga teng kuchli:

$$\begin{cases}\log_3 x+\log_x 3=2\\ 2\cos\left(6\pi x^2\right)=2\end{cases}$$

Sistemaning 1- tenglamasidan $x=3$ ildizni topamiz. Bu ildiz sistemaning 2-tenglamasini qanoatlantiradi. Chunki

$$\cos(6\pi\cdot 3)=\cos(0+27\cdot 2\pi)=2\cos 0=2$$

Javob: $x=3$

4-misol. Tenglamani nechta ildizi bor.

$$\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=4-2x-x^2$$

Yechish. Tenglamaning chap qismini shakl almashtirib, $y=\sqrt{x}$ funksiyani o`suvchiligidan foydalanamiz. $\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=$

$$=\sqrt{3(x+1)^2+4}+\sqrt{5(x+1)^2+9}\geq\sqrt{4}+\sqrt{9}=2+3=5$$

Tenglamaning o`ng qismini shakl almashtirib, $4-2x-x^2=5-(x+1)^2\leq 5$

U holda berilgan tenglama quyidagi tenglamalar sistemasiga teng kuchli

$$\begin{cases}\sqrt{3(x+1)^2+4}+\sqrt{5(x+1)^2+9}=5\\ 5-(x+1)^2=5\end{cases}$$

2-tenglamadan $x=-1$ ildizni topamiz. Bu ildiz sistemaning 1- tenglamasini qanoatlantiradi.

Javob: $x=-1$

5-misol. Tenglamaning ildizlari yig`indisini toping.

$$3-4x-4x^2=2^{4x^2+4x+3}$$

Yechish. Tenglamaning chap va o`ng qismini shakl almashtiraylik.

$2^{4x^2+4x+3}=2^{(2x+1)^2+2}\geq 2^2=4,\ 3-4x-4x^2=4-(2x+1)^2\leq 4$. U holda 2-teoremaga asosan berilgan tenglama quyidagi tenglamalar sistemasiga teng kuchli:

$$\begin{cases} 4-(2x+1)^2=4 \\ 2^{(2x+1)^2+2}=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$ ildizni topamiz.

Javob: $x=-\dfrac{1}{2}$

Funksiyalarning monotonlik xossasidan foydalanish.

Bunday yechish usuli quyidagi tasdiqlarga asoslanadi.

1-*tasdiq*. Agar $f(x)$ funksiya E oraliqda uzluksiz va qat'iy monoton bo'lsa, u holda $f(x)=C$ tenglama E oraliqda ko'pi bilan bitta ildizga ega bo'ladi.

Isbot. Teskaridan faraz qilaylik. $f(x)=C$ tenglama E oraliqda ikkita turli ildizga ega bo'lsin: $f(x_1)=C,\ f(x_2)=C,\ x_1\neq x_2$. Aniqlik uchun $x_1<x_2$ va $f(x)$ qat'iy o'suvchi bo'lsin. U holda $f(x_1)<f(x_2)$, ya'ni $C<C$ ziddiyatga kelamiz. Bu ziddiyat tasdiqni isbotlaydi.

2-*tasdiq*. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar E oraliqda uzluksiz, $f(x)$ qat'iy o'suvchi, $g(x)$ qat'iy kamayuvchi bo'lsin. U holda $f(x)=g(x)$ tenglama E oraliqda ko'pi bilan bitta ildizga ega bo'ladi.

Isbot. Teskaridan faraz qilaylik. $f(x)=g(x)$ tenglama E oraliqda ikkita turli ildizga ega bo'lsin: $f(x_1)=g(x_1),\ f(x_2)=g(x_2),\ x_1\neq x_2$. Aniqlik uchun $x_1<x_2$ bo'lsin. U holda $f(x_1)<f(x_2),\ g(x_1)>g(x_2)$ bo'ladi. Agar ikkinchi tengsizlikni (-1) ga ko'paytirib, birinchisiga qo'shsak quyidagiga ega bo'lamiz:

$f(x_1)-g(x_1)<f(x_2)-g(x_2)$, bundan $0<0$ ziddiyatga kelamiz. Bu ziddiyat tasdiqni isbotlaydi.

3-*tasdiq*. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar qat'iy o'suvchi va o`zaro teskari funksiyalar bo`lsa, u holda $f(x)=g(x)$ tenglama $f(x)=x$ yoki $g(x)=x$ tenglamar teng kuchli bo`ladi.

Isbot. Teskaridan faraz qilamiz. Aytaylik x_0 (1) ning ildizi, lekin (2) ning (yoki (3) ning) ildizi bo'lmasin. U holda $f(x_0)<x_0$ yoki $f(x_0)>x_0$ $(g(x_0)<x_0$ yoki $(g(x_0)>x_0)$ bo'ladi. Aniqlik uchun $f(x_0)<x_0$ bo'lsin. U holda

$g\left(f\left(x_0\right)\right)=x_0<g\left(x_0\right)$ bo'ladi. Bu va oldingi tengsizlikdan $f\left(x_0\right)<x_0<g\left(x_0\right)$ hosil bo'ladi. Bu esa x_0 (1) ning ildizi ekanligiga zid.

Endi x_0 (2) ning (yoki (3) ning) ildizi, lekin (1) ning ildizi bo'lmasin. U holda $f\left(x_0\right)<g\left(x_0\right)$ yoki $f\left(x_0\right)>g\left(x_0\right)$ bo'ladi. Aniqlik uchun $f\left(x_0\right)<g\left(x_0\right)$ bo'lsin. U holda $f\left(f\left(x_0\right)\right)<g\left(g\left(x_0\right)\right)=x_0$ va $x_0=g\left(f\left(x_0\right)\right)<g\left(g\left(x_0\right)\right)$ ya'ni $f\left(f\left(x_0\right)\right)<x_0$ va $g\left(g\left(x_0\right)\right)>x_0$ tengsizliklarni hosil qilamiz. Bu esa x_0 (2) ning (yoki (3) ning) ildizi ekanligiga zid. (haqiqatan ham, agar x_0(2) ning (yoki (3) ning) ildizi bo'lsa, u holda $f\left(f\left(x_0\right)\right)=f\left(x_0\right)=x_0$ bo'lishi lozim).

Eslatma. Oraliq $(-\infty\,;\,\infty),(a\,;\infty)(-\infty\,;\,b),\,[a\,;\,\infty)\,(-\infty\,;\,b]$ cheksiz oraliqlar, kesma, interval, yarim intervallardan iborat bo'lishi mumkin.

1-misol. $x\cdot 2^x=8$ tenglamani yeching.

Yechish: Ravshanki, agar $x\le 0$ bo'lsa, x tenglamaning ildizi bo'la olmaydi (chunki $x\cdot 2^x\le 0$). $x>0$ bo'lganda $f\left(x\right)=x\cdot 2^x$ funksiya uzluksiz va qat'iy o'suvchi, demak $(0\,;\infty)$ oraliqda berilgan tenglamaning ko'pi bilan bitta yechimi mavjud. $x=2$ tenglamaning ildizi bo'lishini ko'rish qiyin emas. Demak bu yagona ildizdir.

Javob: $x=2$.

2-misol. $\sqrt[4]{18-x}-\sqrt[6]{x-2}=2$ tenglamani yeching.

Yechish: Tenglamaning aniqlanish sohasi $[2\,;18]$ kesmadan iborat. Bu to'plamda $f\left(x\right)=\sqrt[4]{18-x}$ va $g\left(x\right)=-\sqrt[6]{x-2}$ funksiyalar uzluksiz va qat'iy kamayuvchi, demak $h\left(x\right)=\sqrt[4]{18-x}-\sqrt[6]{x-2}$ funksiya ham uzluksiz va qat'iy kamayuvchidir. Shu sababli $h\left(x\right)$ funksiya har bir qiymatini faqat bitta nuqtada qabul qiladi. $h\left(2\right)=2$ ekanligini tekshirish qiyin emas. Demak, $x=2$ tenglamaning yagona ildizi bo'ladi.

Javob: $x=2$.

3-misol. $\sqrt[3]{x-9}=\left(x-3\right)^3+6$ tenglamani yeching.

Yechish: Tenglamani $\sqrt[3]{x-9}=\left(x+3\right)^3+9$ ko`rinishda yozaylik. U holda, $y=\left(x-3\right)^2+9$ va $y=\sqrt[3]{x-9}+3$ funksiyalarning har biri o`suvchi funksiyalardan iborat. $y=\left(x-3\right)^2+9$ funksiyaga teskari funksiyani topaylik. Buning uchun berilgan funksiyani x ga nisbatan yechaylik va x va y ni o`rinlarini almashtiraylik. $y=(x-3)^2+9 \Rightarrow x-3=\sqrt[3]{y-9} \Rightarrow x=\sqrt[3]{y-9}+3 \Rightarrow$ $\Rightarrow y=\sqrt[3]{x-9}+3$. Demak, $y=(x-3)^2+9$ va $y=\sqrt[3]{x-9}+3$ funksiyalar o`zaro teskari funksiyalar ekan. U holda, 3 – tasdiqqa asosan berilgan tenglama $(x-3)^2+9=x$ tenglamaga teng kuchli. Bu tenglamani yechaylik.

$$x^3-9x^2+26x-18=0 \Rightarrow (x-1)\left(x^2-8x+18=0\right)$$

$$x=1, \quad x^2-8x+18=(x+4)^2+2>o$$

Javob: $x=1$

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Algebra va analiz asoslari:Akad.litseylar uchun darslik/ A.U.Abduhamidov, H.A.Nasimov, U.M.Nosirov, J.H.Husanov [H.A.Nasimovning umumiy tahriri ostida]; O`zbekiston Respublikasi Oliy va o`rta maxsus ta`lim vazirligi, O`rta maxsus kasb-hunar ta`limi markazi. 8-nashr.-T.: "O`qituvchi" NMIU, 2009. Q.I. -400b.
2. Azlarov. T., Mansurov. X., Matematik analiz. T.: «O'zbekiston». 1,2 qism: 1994.-416b.
3. Olexnik S.N., Potapov M.K. Nestandartnыe metodы resheniya uravneniy i neravenstv. M.:MGU, 1991,-144s.
4. Vavilov V.V. i dr. Zadachi po matematike. Nachala analiza.- M.:Nauka. 1990.,-608s.
5. Galperin I.M, Gabovich I.G «Ispolzovanie vektornogo neravenstva Koshi-Bunyakovskogo dlya resheniya zadach po algebre»// Matematika v shkole №2 1991g
6. Genkin G.Z. Geometricheskie resheniya negeometricheskix zadach. M. Prosveщenie. 2007.-79s.
7. Suprun V.P. Matematika dlya starsheklassnikov. Nestandartnыe metodы resheniya zadach. – M. Knijnыy dom «Librikom». 2009.-272s.
8. Turgunbaev R.M. Koshnazarov R. Matematik analizning ba'zi elementar matematika masalalarini yechishga tatbiqi. T.TDPU. 2008
9. Narmanov A.Ya. and Sharipov A.S. On the geometry of foliated manifolds // Bulletin of Mathematics and Statistics Research Vol.4.Issue.2.2016 (April-June) P. 56-62. (№ 5, Global Impact factor, GIF=0,458)