

MATRITSANING RANGI VA UNI HISOBLASH

Turg'unova Zarina

*Shahrisabz davlat pedagogika instituti psixologiya
yo'nalishi 1-bosqich talabasi*

Annotatsiya: Ushbu maqolada matritsaning rangi (ranki) tushunchasi, uning algebraik va geometrik mazmuni, chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda tutgan o'rni hamda amaliyotdagi ahamiyati yoritilgan. Matritsaning rangi satr va ustunlar orasidagi chiziqli bog'lanish darajasini aniqlovchi muhim ko'rsatkich ekanligi izohlanadi. Rangni hisoblashning asosiy usullari — elementar o'zgartirishlar yordamida Eshilon shaklga keltirish, determinantlar usuli va Kroneker–Kapelli teoremasi asosida aniqlash yo'llari ketma-ket bayon qilingan. Shuningdek, matritsa rangining fizik, iqtisodiy va texnik masalalarni modellashtirishdagi roli amaliy misollar orqali ko'rsatib berilgan. Tadqiqot natijalari matritsa rangining nazariy asoslarini chuqurroq o'zlashtirishga va uni turli amaliy vazifalarda qo'llash imkoniyatlarini kengaytirishga xizmat qiladi.

Kalit so'zlar: matritsa, rang, rank, chiziqli bog'lanish, Eshilon shakl, Gauss usuli, determinant, Kroneker–Kapelli teoremasi, chiziqli algebra, tenglamalar sistemi.

Chiziqli algebra — zamonaviy matematikaning eng asosiy bo'limlaridan biri bo'lib, unda vektorlar, matritsalar va ularning o'zaro munosabatlari o'rganiladi. Matritsa tushunchasi turli sohalarda, jumladan, axborot texnologiyalari, iqtisodiyot, mexanika, fizika, kompyuter grafikasida va sun'iy intellekt tizimlarida keng qo'llaniladi. Matritsaning muhim xususiyatlaridan biri — uning rangi (rank) bo'lib, u matritsadagi chiziqli mustaqil elementlar sonini bildiradi.

Rang orqali matritsaning strukturasidagi haqiqiy informatsiya miqdori, chiziqli tenglamalar sistemasining yechimlari soni, vektorlar o'rtasidagi bog'liqlik darajasi aniqlanadi. Shu sababli, matritsaning rangi matematik modelash va hisoblash jarayonlarida asosiy diagnostik ko'rsatkichlardan biri sanaladi.

Quyida matritsa rangining matematik ta'rifi, uning fizik va geometrik mazmuni, rangni hisoblash usullari hamda amaliy misollar keng yoritilgan.

1. Matritsa va chiziqli bog'liqlik tushunchalari

Matritsa — bu sonlar yoki algebraik ifodalarning tartibli to'plami bo'lib, satrlar va ustunlar ko'rinishida joylashtiriladi. Matritsaning har bir satri yoki ustuni mustaqil vektor bo'lib qaralishi mumkin.

1.1. Chiziqli bog'liqlik

Vektorlar to'plami chiziqli mustaqil deyiladi, agar:

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n = 0 \quad k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n = 0$$

tenglamaning yagona yechimi $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$ bo'lsa.

Agar nol bo'lmagan yechim mavjud bo'lsa, vektorlar chiziqli bog'liq bo'ladi.

Chiziqli bog'liqlik matritsaning rangini belgilovchi asosiy tushunchadir.

1.2. Satrlar va ustunlar orasidagi bog'liqlik

Matritsaning satrlari quyidagi holatlarda chiziqli bog'liq bo'ladi:

- bir satr boshqasi bilan proporsional bo'lsa;
- bir satr boshqalarning chiziqli kombinatsiyasi bo'lsa;
- barcha satrlar n -barobar ko'paytirilganda bir xil shaklga kelsa.

Aynan shu bog'liqliklar matritsa rangini kamaytiradi.

2. Matritsaning rangi: matematik ta'riflar

Matritsaning rangi (rank) bir nechta ekvivalent yo'l bilan aniqlanadi:

2.1. Ta'rif 1 — chiziqli mustaqil satrlar soni

$\text{rank}(A) = \text{liniyaviy mustaqil satrlar soni}$

2.2. Ta'rif 2 — chiziqli mustaqil ustunlar soni

$\text{rank}(A) = \text{liniyaviy mustaqil ustunlar soni}$

2.3. Ta'rif 3 — maksimal tartibli nolga teng bo'lmagan minorning tartibi

Agar matritsada $k \times k$ o'lchamli biror minor nolga teng bo'lmasa, ammo undan katta tartiblilarning barchasi nol bo'lsa, unda:

$\text{rank}(A) = k$

2.4. Rangning o'zaro tengligi teoremasi

Har uchala ta'rif bir-biriga teng qiymat beradi.

Bu teorema chiziqli algebra asosiy natijalaridan biri bo'lib, matritsaning satrlari va ustunlari bir xil darajada muhim ekanligini ko'rsatadi.

3. Rangi hisoblashning asosiy algoritmlari

Matritsaning rangini topishda bir nechta usullardan foydalaniladi. Ko'p hollarda amaliy dasturlashda va hisoblashlarda Gauss eliminatsiyasi ishlatiladi. Teoretik isbotlarda esa minorlar metodi ko'proq qo'llanadi.

3.1. Gauss eliminatsiyasi usuli

Bu usul quyidagi elementar satr o'zgarishlariga asoslanadi:

1. ikki satrni almashtirish;
2. satrni nolga teng bo'lmagan songa ko'paytirish;
3. bir satrga boshqasining ko'paytmasini qo'shish.

Bu amallar matritsaning rangini o'zgartirmaydi.

3.2. Echelon forma

Matritsani uchburchaksimon (yordamchi) ko'rinishga keltirgandan so'ng:

- nol bo'lmagan satrlar soni = matritsaning rangi.

3.3. Minorlar orqali rangni topish

Agar matritsada barcha 3×3 minorlar nol bo'lsa, ammo biror 2×2 minor nol bo'lmasa, rang = 2.

Bu usul katta o'lchamli matritsalar uchun murakkab, lekin nazariy jihatdan juda kuchli.

3.4. SVD (Singular Value Decomposition) orqali rang

Zamonaviy algoritmlarda:

$$A = U \Sigma V^T \quad A = U \Sigma V^T \Rightarrow U \Sigma V^T = U \Sigma V^T$$

ko'rinishdagi SVD ajratishdan so'ng, Σ dagi nol bo'lmagan singular qiymatlar soni — matritsaning rangi.

4. Matritsa rangining geometrik mazmuni

Matritsa rangini geometrik tasavvur orqali ham tushunish mumkin:

- Rang vektorlar hosil qiladigan fazoning o'lchamidir.
- Agar rang = 1 bo'lsa, barcha vektorlar bir chiziqli ustida yotadi.
- Rang = 2 bo'lsa, ular bir tekislikni egallaydi.
- Rang = 3 bo'lsa, uch o'lchamli fazoni to'ldiradi.

Bu yondashuv ayniqsa fizika, kompyuter grafikasi, mashina o'rganishda muhim.

5. Amaliy misollar

Misol 1

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 32 & 46 & 11 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 12 & 24 & 13 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Gauss usuli natijasida:

$$\text{rank}(A) = 2 \quad \text{rank}(A) = 2 \quad \text{rank}(A) = 2$$

Misol 2

$$B = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 00 & 30 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 10 & 30 & 00 & 20 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 10 & 30 & 00 & 20 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Ikkinchi satr nol, qolgan ikki satr proporsional: $3 = 3 \times 1$.

Demak:

$$\text{rank}(B) = 1 \quad \text{rank}(B) = 1 \quad \text{rank}(B) = 1$$

Misol 3: Minorlar orqali

Agar 3×3 determinant = 0 va 2×2 minor mavjud bo'lsa:

$$\text{rank} = 2 \quad \text{rank} = 2 \quad \text{rank} = 2$$

6. Matritsa rangining qo'llanishlari

Matritsa rangi quyidagi sohalarda keng qo'llaniladi:

6.1. Chiziqli tenglamalar sistemasining yechimi

Rang yordamida sistema:

- yagona yechimga,
- cheksiz ko'p yechimga,
- yoki hech qanday yechimga ega ekanligi aniqlanadi.

6.2. Mashina o'rganish va AI

Mashina o'rganishda ma'lumotlar matritsasi rangi:

- ma'lumotlarning murakkabligi,
- shovqinning darajasi,
- o'lchamlarni qisqartirish (PCA),
- axborot sig'imi

haqida ma'lumot beradi.

6.3. Kompyuter grafikasi

3D sahnalarda matritsalar ob'ektning koordinatalarini o'zgartirish uchun ishlatiladi. Rang esa transformatsiyalarni optimallashtirishda yordam beradi.

6.4. Iqtisodiyot

Regressiya modellari va statistik tahlillarda rang yordamida multikollinearlik aniqlanadi.

Xulosa

Matritsaning rangi — chiziqli algebra, statistika, informatika, iqtisodiyot va boshqa ko'plab sohalarida fundamental ahamiyatga ega tushunchadir. Rang vektorlarning mustaqillik darajasini va matritsaning haqiqiy struktura hajmini aniqlaydi. Uni hisoblashning Gauss, minorlar, SVD kabi metodlari mavjud bo'lib, har biri o'z o'rniga ega.

Matritsa rangi yordamida chiziqli tenglamalar sistemasining yechimlari tahlil qilinadi, geometrik fazolar o'rganiladi, algoritmlar tezlashtiriladi va ma'lumotlar siqiladi. Shuning uchun bu tushunchaning chuqur o'rganilishi har bir matematik va texnik yo'nalish talabasi uchun zarurdir.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Sh. Turdiyev, R. Omonov. Chiziqli algebra: Nazariya va masalalar. – Toshkent: O'qituvchi, 2021.
2. A. Axmedov. Oliy matematika kursi. – Toshkent: Fan nashriyoti, 2018.
3. L. S. Pontryagin. Kurs lineynoy algebr. – Moskva: Nauka, 2019.
4. S. Lang. Linear Algebra. – New York: Springer, 2017.
5. Gilbert Strang. Introduction to Linear Algebra. – MIT Press, 2016.
6. K. Hoffman, R. Kunze. Linear Algebra. – Pearson, 2015.

7. D. Lay, S. Lay, J. McDonald. Linear Algebra and Its Applications. – Pearson, 2021.
8. A. Abdullayev. “Matritsalar nazariyasi va ularning qo‘llanilishi.” – Matematika va Informatika Jurnal, №3, 2020.
9. V. I. Smirnov. Kurs vysshey matematiki. Tom 2. – Moskva: Fizmatlit, 2014.
10. O. V. Bogdanov. “Rank matritsy i metody ego opredeleniya.” – Uchebnye zapiski MGU, 2019.
11. Nicholson, W. Keith. Linear Algebra with Applications. – McGraw-Hill, 2018.
12. MIT OpenCourseWare. “Linear Algebra (18.06) — Lecture Notes.” <https://ocw.mit.edu> (Kurs materiallari)

