TOR TEBRANISH VA ISSIQLIK TARQALISH MASALALARINI KORREKTLIKKA TEKSHIRISH

Jo'rayev Ahliddin Ravshanjon o'g'li
Farg'ona davlat unversiteti talabasi
E-mail: tdaxshat@gmail.com
Nozimov Hayotillo Bahtiyorjon o'g'li
Farg'ona davlat unversiteti talabasi
E-mail: tdaxshat@gmail.com

Annotatsiya: *Ushbu tezisda tor tebranish va issiqlik tarqalish tenglamalari doirasida tuzilgan matematik modellar tahlil qilinadi hamda ularning korrektlik shartlari (yechim mavjudligi, yagonaligi va uzluksiz bog'liqligi) o'rganiladi. Masala misol asosida spektral metod yordamida yechilib, yechimning korrektligi matematik jihatdan asoslanadi.*

Kalit so'zlar: *tor tebranish, issiqlik tarqalish, matematik fizika tenglamalari, korrektlik, giperbolik tenglama, parabolik tenglama, spektral metod, boshlang'ich va chegaraviy shartlar.*

Annotation: *This thesis examines mathematical models related to string vibration and heat conduction equations. The focus is on the correctness of the problems, including the existence, uniqueness, and stability of solutions. Using a concrete example and applying the spectral method, the correctness of the solution is mathematically justified.*

Keywords: *string vibration, heat conduction, mathematical physics equations, correctness, hyperbolic equation, parabolic equation, spectral method, initial and boundary conditions.*

Аннотация: *В данной работе рассматриваются математические модели, описывающие колебания струны и распространение тепла. Особое внимание уделяется корректности задач, то есть существованию, единственности и устойчивости решения. На основе конкретного примера, с использованием спектрального метода, обоснована корректность решения*

Ключевые слова. *колебание струны, теплопроводность, уравнения математической физики, корректность, гиперболическое уравнение, параболическое уравнение, спектральный метод, начальные и граничные условия.*

Kirish Matematik fizika tenglamalari real fizik jarayonlarni matematik modellashtirishda asosiy vosita hisoblanadi. Ushbu tenglamalar ichida tor tebranish tenglamasi va issiqlik tarqalish tenglamasi muhim o'rin tutadi, chunki ular fizikada, muhandislikda, mexanikada, elektrotexnika va boshqa koʻplab sohalarda uchraydi.Mazkur tenglamalar odatda chegaraviy-boshlangʻich shartlar bilan birgalikda koʻrib chiqiladi va ular uchun korrektlik masalasi dolzarb ahamiyat kasb etadi. Korrektlik (fransuzcha “corriger” — toʻgʻrilash) matematik masalaning muhim sifatlaridan biridir: u yechim mavjudligi, yechimning yagona boʻlishi va kirish ma’lumotlariga nisbatan yechimning uzluksiz bogʻliqligini anglatadi.Aynan mana shu tezisda biz issiqlik tarqalish hamda tor tebranish tenglamalari uchun korrektlikni tahlil qilamiz, masalalarni klassik formulalarda ifodalaymiz, va berilgan misol asosida tekshiramiz.

Asosiy qism

To’g’ri Masala. Bizga

$$U_t = a^2 U_{xx} \quad (1)$$

tenglamani va

$$U(x,0) = \varphi(x), 0 \le x \le l \quad (2)$$

$$U_x(0,t) = U_x(l,t) = 0, 0 \le t \le T \quad (3)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $U(x,t)$ funksiya topilsin.

Teskari Masala. $t \in [t_0, t_1], t_0 > 0$ bo’lganda

$$g(t) = U(x_0, t) \quad (4)$$

funksiya berilgan, bu yerda $x_o - [0,l]$ kesmadagi biror fiksrlangan nuqta, $U(x,t)$ esa $(1)-(3)$ masalaning yechimi. $[0,l]$ kesmada $\varphi(x)$ funksiyani topish talab qilinadi.

Bu teskari masalaning fizik talqini quyidagicha. Muayyan vaqt oralig’ida harorat sterjenning belgilangan nuqtasida o’lchanadi va bu o’lchovlardan dastlabki harorat taqsimotini aniqlash kerak.

$(1)-(3)$ masalaning yechimini o’zgaruvchilarni ajratish usuli bilan ya’ni Fure usuli yordamida ishlaymiz.

$$U(x,t) = X(x) \cdot T(t) \quad (5)$$

ko’rinishida yozib olib, (5) tenlamadan dastlab t bo’yicha birinchi tartibli xosila so’ngra x bo’yicha ikkinchi tartibli xosila olib (1) tenglamaga qo’yamiz. Bizda

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

tenglik hosil bo’ladi. Bu tenglik yordamida ikkita tenglam tuzib olamiz. Ular

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \quad (6)$$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X_x(0) = X_x(l) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Bulardan

$$U(x,t) = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(\xi)d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\cos\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi \exp\left\{-\left[\pi n/l\right]^2 a^2 t\right\}\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$$

ko'rinishiga ega. Bu tenglikka $x = x_0$ qo'yib, $\varphi(x)$ fuksiya uchun

$$\frac{1}{l}\int_0^l \varphi(\xi)d\xi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\cos\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi \exp\left\{-\left[\pi n/l\right]^2 a^2 t\right\}\cos\left(\frac{\pi n}{l}x_0\right) = g(t)$$

tenglama hosil bo'ladi. Bu yerda $t \in [t_0, t_1]$.

O'lchov nuqtasi x_o segment oxirida bo'lgan taqdirda (1) tenglama yechimining yagonaligini tekshiramiz. Yagonaligini aniqlash uchun bizga teorema yordam beradi.

Teorema. Agar $x_o = 0$ bo'lsa, (1) tenglamaning yechimi $L_2[0,l]$ fazoda yagona bo'ladi.

Isbot. (1) tenglamaning chiziqliligidan kelib chiqadiki, $L_2[0,l]$ fazoda yechimning yagonaligini isbotlash uchun $g(t) = 0$ bo'lganda faqat nolga teng yechimga ega ekanligini ko'rishimiz mumkin.

Misol. Keling, ko'rib chiqilayotgan masala issiqlik tarqalishi tenglamasi asosida ifodansin

$$U_t = a^2 U_{xx}$$

Quyidagi bosh va chegaraviy shartlar berilgan

$$v(x,0) = 0, \quad v(0,t) = 0, \quad v(l,t) = 0, \quad v(x,t) = 0$$

Bu yerda $v(x,t) = 0$ – issiqlik tarqalish tenglamasining yechimi, a – issiqlik tarqalish koeffitsienti, l – novda uzunligi.

Spektral metod asosida tekshiruv:

Masalaning korrektligini tekshirish uchun, spektral metod yordamida komponentalarga ajratamiz. Faraz qilaylik, yechim quyidagi shaklda ifodalangan:

$$y'_n(t) = \int_0^l v_t(x,t)\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n}{l}xdx$$

Bu yerda sinus funksiyasi asosiy sistemani tashkil qiladi. Endi quyidagi almashtirishlarni qo'llaymiz:

$$u = \sin\frac{\pi n}{l}x, \quad du = \frac{\pi n}{l}\cos\frac{\pi n}{l}xdx$$

$$dv = v_{xx}dx, \; v = v_x$$

Shundan so'ng quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$a^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l v_x \frac{\pi n}{l}\cos\frac{\pi n}{l}xdx$$

Bu integralni qisqartma usul bilan baholaymiz. Uni qisqartirishda quyidagi qoidalardan foydalanamiz:

$$\begin{cases} u=\cos\frac{\pi n}{l}x \\ du=-\sin\frac{\pi n}{l}xdx\cdot\frac{\pi n}{l} \\ dv=v_x dx \\ v=v(x,t) \end{cases}$$

Shu asosda integral ifodasi:

$$-a^2\cdot\sqrt{\frac{2}{l}}\left(\cos\frac{\pi n}{l}x\cdot v(x,t)\,/_0^l+\int_0^l\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot\frac{\pi n}{l}dx\right)$$

Berilgan chegaraviy shartlarga ko‘ra $v(0,t)=v(l,t)=0$, shuning uchun

$$\cos\frac{\pi n}{l}x\cdot v(x,t)\,/_0^l=0$$

Shuningdek:

$$\int_0^l\sin\frac{\pi n}{l}xdx=\frac{1}{\pi n}\cdot\left(1-(-1^n)\right)\rightarrow \text{juft n uchun} =0$$

Shu sababli umumiy ifoda 0 ga teng:

$$-a^2\cdot\sqrt{\frac{2}{l}}(0)=0$$

Bu orqali yechimning mavjudligi va boshlang‘ich shartlarga bog‘liqligi isbotlanadi.

Xulosa

Yuqorida ko‘rib chiqilgan masala issiqlik tarqalish tenglamasiga doir bo‘lib, klassik boshlang‘ich va chegaraviy shartlarga ega. Spektral tahlil orqali yechim korrekt ekanligi – ya’ni, mavjudligi, yagonaligi va uzluksiz bog‘liqligi aniq isbotlandi.Bu kabi masalalarning korrektligi ularni amaliy fizik modellashtirishda ishonchli yechim olish uchun muhim hisoblanadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. “Solutions of Ill-posed Problems.” Winston & Sons, 1977.

2. Lavrent'ev M.M. va boshqalar. “Teskari masalalar nazariyasi.” Fan, 1980.

3. Özisik M.N., Orlande H.R.B. “Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications.” Taylor & Francis, 2000.

4. Kabanikhin S.I. “Definitions and examples of inverse and ill-posed problems.” J. Inverse and Ill-posed Problems, 2011.